

# OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN MEDIANTE TÉCNICAS EVOLUTIVAS Y DIFERENTES MEDIDAS DE RIESGO



Universidad Carlos III de Madrid

Autor: Alejandro Antón Aguilar

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas



## Abstract

Debido al creciente interés e importancia que están teniendo los instrumentos financieros y las medidas de riesgo en los últimos años, especialmente desde comienzos de la crisis de 2008, es necesario desarrollar y utilizar nuevos modelos y técnicas que permitan abordar este tipo de problemas.

El auge de los fondos de inversión hace que este trabajo trate de la gestión de activos y de cómo la Teoría Moderna de Carteras afronta y soluciona esta cuestión.

Se cuestionará una de las limitaciones principales de esta teoría, las medidas de riesgo utilizadas hasta el momento por los modelos clásicos, y se propondrán nuevos modelos que utilicen diferentes medidas de riesgo que reflejen de forma más real las preferencias de los inversores y gestores.

Para ello, al tratarse de un problema que persigue más de un objetivo de forma simultánea, se planteará resolverlo con herramientas que han sido desarrolladas específicamente para ellos, los algoritmos evolutivos multiobjetivo, MOEAs. Estas técnicas ofrecen sustanciales ventajas a la hora de afrontar estos problemas frente a las técnicas clásicas de optimización.

Con esto, el objetivo de este trabajo es el de utilizar MOEA para abordar el problema de optimizar carteras de inversión. Se pretende que los modelos propuestos utilicen diferentes medidas de riesgo a la original y que solucionen las limitaciones que presenta el modelo clásico de Markowitz. Se persigue demostrar, con sus resultados en cuanto a rendimiento, que son una herramienta a tener en cuenta por los inversores y gestores.

**Palabras clave:** algoritmo genético, MOEA, NSGA-II, optimización de carteras, Value at Risk, Mean Absolute Deviation, medidas de rentabilidad ajustada al riesgo.



## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis tutores, Antonio Berlanga y Miguel Ángel López, su apoyo, sus consejos y conocimientos. Me han hecho conocer campos y temas en los que tenía especial interés y que sin su ayuda aún estaría intentando conocer.

Quiero agradecer a mi familia y amigos todo el apoyo recibido durante estos años y en concreto este último curso. Especialmente dar las gracias a mis padres y a mi hermano Miguel, que me han brindado todo tipo de facilidades para que este trabajo salga adelante. También quiero destacar toda la ayuda que me ha dado mi hermano, sin el no habría sido capaz de haber completado este trabajo.

De entre mis amigos quiero destacar a mis compañeros de clase, en concreto a la Hack Crew. Gracias a ellos he pasado parte de los mejores momentos, hemos pasado días y noches enteras compartiendo muy buenos ratos y han logrado que ir a clase fuese algo especial.

Por último, dar mi agradecimiento a la Universidad Carlos III y a su profesorado. Me han dado clase grandes profesionales y expertos que me han guiado y orientado durante todos estos años de estudio.

A todos ellos, mi más sincero agradecimiento.

Alejandro Antón Aguilar

Colmenarejo, Septiembre de 2015.



# Contenidos

1	Introducción .....	1
1.1	Objetivos .....	2
1.2	Organización del documento .....	2
2	Teoría de la optimización .....	7
2.1	Optimización .....	7
2.2	Optimización clásica .....	9
3	Computación evolutiva.....	12
3.1	Introducción.....	12
3.2	Algoritmos Genéticos.....	16
4	MOEA .....	19
4.1	Introducción.....	19
4.2	Uso de Algoritmos Evolutivos en MOP.....	21
4.3	NSGA-II .....	24
5	Diferencias entre AE y otras técnicas de optimización .....	28
6	Teoría moderna de carteras.....	34
6.1	Modelo clásico de Markowitz.....	34
6.2	Optimización de Carteras.....	37
6.3	Medidas de riesgo alternativas .....	39
6.3.1	Value at Risk .....	41
6.3.2	Mean Absolute Deviance (MAD) .....	44
7	Métodos de evaluación de los resultados.....	46
7.1	Ratio de Sharpe.....	47
7.2	Ratio de Treynor .....	47
7.3	Alfa de Jensen .....	48
7.4	Modelo de Tres Factores de Fama – French.....	49
8	Descripción de los datos y parámetros empleados .....	51
8.1	Descripción de los parámetros.....	52
8.2	Descripción de los datos utilizados.....	54
9	Evaluación de los resultados.....	56
9.1	Modelo Media – Varianza.....	56
9.2	Modelo Media – VaR.....	59
9.3	Modelo Media – MAD.....	64
9.4	Modelo Media – Varianza – VaR.....	66
9.5	Modelo Media – Varianza – MAD.....	71
9.6	Modelo Media – VaR – MAD.....	74

9.7	Modelo Media – Varianza – VaR – MAD .....	78
10	Comparación y selección del mejor modelo.....	84
11	Conclusiones y trabajo futuro .....	88
11.1	Conclusiones .....	88
11.2	Trabajo futuro .....	91
12	Planificación .....	94
12.1	Planifiación inicial .....	94
12.2	Planificación real .....	95
13	Presupuesto .....	98
14	Referencias.....	99
Anexo 1	Resumen en Inglés .....	105
Anexo 2	Resultados.....	124



## Índice de Tablas

Tabla 1. Comparación terminológica entre la Naturaleza y la CE .....	15
Tabla 2. Parámetros comunes .....	56
Tabla 3. Parámetros de entrada modelo Media- Varianza.....	56
Tabla 4. Resultados del índice .....	58
Tabla 5. Resultados modelo Media - Varianza.....	59
Tabla 6. Parámetros de entrada modelo Media - VaR.....	60
Tabla 7. Rentabilidades media y máxima del modelo Media - VaR.....	61
Tabla 8. Resultados del índice .....	61
Tabla 9. Resultados modelo Media - VaR 1% .....	62
Tabla 10. Resultados modelo Media - VaR 5%.....	62
Tabla 11. Resultados modelo Media - VaR 10%.....	62
Tabla 12. Resultados media Media - VaR 40%.....	62
Tabla 13. Parámetros de entrada modelo Media - MAD.....	64
Tabla 14. Resultados del índice.....	66
Tabla 15. Resultados modelo Media - MAD .....	66
Tabla 16. Parámetros de entrada modelo Media – Varianza - VaR.....	67
Tabla 17. Rentabilidades media y máxima del modelo Media – Varianza - VaR .	68
Tabla 18. Resultados del índice.....	69
Tabla 19. Resultados Modelo Media - Varianza - VaR 1%.....	69
Tabla 20. Resultados Modelo Media - Varianza 5% .....	69
Tabla 21. Resultados Modelo Media - Varianza 10%.....	70
Tabla 22. Resultados Modelo Media - Varianza 40%.....	70
Tabla 23. Parámetros de entrada modelo Media – Varianza - MAD.....	72
Tabla 24. Resultados del índice.....	73
Tabla 25. Resultados del Modelo Media - Varianza - MAD .....	73
Tabla 26. Parámetros de entrada modelo Media – VaR - MAD.....	74
Tabla 27. Rentabilidades media y máxima del modelo Media – VaR - MAD .....	75
Tabla 28. Resultados índice .....	76
Tabla 29. Resultados Modelo Media - VaR – MAD 1% .....	76
Tabla 30. Resultados Modelo Media - VaR – MAD 5% .....	76
Tabla 31. Resultados Modelo Media - VaR – MAD 10% .....	77

Tabla 32. Resultados Modelo Media - VaR - MAD 40% .....	77
Tabla 33. Parámetros de entrada modelo Media – Varianza - VaR - MAD .....	79
Tabla 34. Rentabilidades media y máxima del modelo Media – Varianza - VaR - MAD .....	80
Tabla 35. Resultados índice .....	81
Tabla 36. Resultados Modelo Media - Varianza - VaR - MAD 1% .....	81
Tabla 37. Resultados Modelo Media - Varianza - VaR - MAD 5% .....	81
Tabla 38. Resultados Modelo Media - Varianza - VaR - MAD 10% .....	82
Tabla 39. Resultados Modelo Media - Varianza - VaR - MAD 40% .....	82
Tabla 40. Tabla resumen y mejor modelo .....	84
Tabla 41. Tabla resumen Betas de los mejores modelos .....	87
Tabla 42. Presupuesto detallado .....	98
Tabla 43. Presupuesto resumido .....	98

## Índice de Figuras

Figura 1. Funciones discontinuas [15].....	8
Figura 2. Función con múltiples picos [15].....	9
Figura 3. Esquema de las distintas técnicas de Optimización .....	9
Figura 4. Frente de Pareto [15] .....	21
Figura 5. Esquema de ordenamiento de NSGA2 [50].....	25
Figura 6. Espectro de problemas [15].....	29
Figura 7. Conjunto de soluciones factibles [24] .....	38
Figura 8. Distribución VaR.....	43
Figura 9. Requisitos de un FIM_RV_Nacional .....	54
Figura 10. Evolución inversión Media-Varianza.....	57
Figura 11. Histograma medidas de performance Media - Varianza.....	58
Figura 12. Media – VaR 1%.....	60
Figura 13. Media – VaR 5%.....	60
Figura 14. Media – VaR 10%.....	60
Figura 15. Media – VaR 40%.....	60
Figura 16. Evolución inversión Media - MAD .....	64
Figura 17. Histograma medidas de performance Media - MAD .....	65
Figura 18. Media - Varianza - VaR 1%.....	68
Figura 19. Media – Varianza – VaR 5% .....	68
Figura 20. Media – Varianza – VaR 10%.....	68
Figura 21. Media – Varianza – VaR 40%.....	68
Figura 22. Evolución inversión Media – Varianza - MAD .....	72
Figura 23. Histograma medidas de performance Media - Varianza - MAD.....	73
Figura 24. Modelo Media - VaR - MAD 1%.....	75
Figura 25. Modelo Media - VaR - MAD 10% .....	75
Figura 26. Modelo Media - VaR - MAD 5 %.....	75
Figura 27. Modelo Media - VaR - MAD 40% .....	75
Figura 28. Modelo Media – Varianza – VaR – MAD 1% .....	80
Figura 29. Modelo Media – Varianza – VaR – MAD 5% .....	80
Figura 30. Modelo Media – Varianza – VaR – MAD 10%.....	80
Figura 31. Modelo Media – Varianza – VaR – MAD 40%.....	80

Figura 32. Planificación presupuestada.....	95
Figura 33. Planificación real .....	97



# 1 Introducción

La Teoría Moderna de Carteras es un tema que ha generado multitud de investigaciones en los últimos cincuenta años, en concreto desde que Henry Markowitz revolucionó el panorama financiero con su modelo de Media – Varianza.

El interés por la Teoría Moderna de Carteras viene dado porque se trata de elegir la combinación correcta de activos que genere la máxima rentabilidad asumiendo el mínimo riesgo posible. La búsqueda de esta combinación que haga obtener al inversor la máxima utilidad ha llevado a que se utilicen y desarrollen numerosas técnicas que resuelvan este problema.

Esto, junto a un contexto en el que los instrumentos financieros se han convertido en una herramienta más común y a la que cada vez más usuarios tienen acceso, ha hecho que surjan más gestores de patrimonios, de los cuales muchos de ellos no aportan valor a la gestión del fondo o cartera que manejan pues simplemente se dedican a seguir el comportamiento del índice al que referencian.

Se propone revisar uno de los temas clásicos, la gestión de carteras, y desarrollar nuevos modelos que puedan ser utilizados en la práctica, pues uno de los principales problemas que presenta la Teoría Moderna de Carteras es que no se usa en la práctica por los gestores e inversores por las limitaciones que presenta. Una de ellas es la medida de riesgo que se utiliza, la Varianza.

Respecto a la medida de riesgo de la Varianza, hay otras medidas de riesgo más adecuadas debido a la naturaleza y distribución que siguen los datos. Las medidas de riesgo asimétricas son más adecuadas cuando la distribución de las rentabilidades no es normal, que en el mundo real es lo más frecuente, y por ello, en general, los profesionales y los inversores tienen más interés en medidas de riesgo como son la Semidesviación, el Value at Risk y el Mean Absolute Deviation.

Debido a la naturaleza de la cuestión planteada, un problema de optimización que involucra dos objetivos enfrentados, esta ha sido un tema muy tratado por la rama de las matemáticas y por ello han surgido variantes que han llevado a que se empleen técnicas del campo de la Inteligencia Artificial, como la Computación Evolutiva.

La Computación Evolutiva es un campo que ha crecido mucho en los últimos veinte años y que también ha suscitado interés, en gran parte debido a la mejora a nivel técnico de las computadoras y equipos. Esto ha permitido que hoy en día haya suficiente potencia como para abordar problemas complejos que hace unos años parecían inviables.

## **1.1 Objetivos**

Los objetivos que se persiguen en este Trabajo de Fin de Grado es comprobar cómo técnicas de optimización multiobjetivo basadas en algoritmos evolutivos, pueden ayudar a mejorar las soluciones obtenidas por las técnicas tradicionales y ayudar a alcanzar los siguientes objetivos:

El objetivo principal de este trabajo es hacer frente a las limitaciones que tiene el modelo propuesto por Markowitz con respecto a la medida de riesgo que usa y que por ello, aunque es teóricamente perfecto, no lo es en la práctica por los supuestos que se asumen y por ello no es utilizado como herramienta por los gestores e inversores.

Para ello se va estudiar cómo el uso de modelos de optimización con otras medidas, como el Value at Risk y el Mean Absolute Deviation, afectan al rendimiento y evaluación de una cartera de inversión y si realmente resuelven parte de las limitaciones del modelo original. Además se comprobará si obtienen resultados que se comportan de forma independiente al índice, cosa que no realizan la mayoría de gestores de fondos de inversión.

## **1.2 Organización del documento**

A continuación se describe cada uno de los capítulos que forman este trabajo. Este documento consta de 3 partes principales:

- En la primera parte se trata el estado del arte, donde se introduce en primer lugar la teoría de la optimización, para luego describir las técnicas computacionales que se emplean. En segundo lugar se presenta el modelo clásico de Media – Varianza, su definición y las medidas de riesgo alternativas que se utilizan. En tercer y último lugar se exponen las medidas de performance empleadas para cuantificar y evaluar el comportamiento de las carteras generadas.
- En la segunda parte se presentan los modelos y pruebas que se han implementado y ejecutado y que se someten a la evaluación. En primer lugar se describen los datos y parámetros usados para realizar las pruebas. Luego se analiza el comportamiento de las soluciones generadas por cada uno de los modelos. Por último, se analizan y comparan cada una de los modelos para determinar cuál ha sido el modelo que mejores resultados ha obtenido.
- En la tercera y última parte tratan las conclusiones que se han extraído de la realización de este proyecto. Se determina el alcance de las soluciones obtenidas y si se ha podido lograr cumplir con el objetivo propuesto. También se tratan las futuras líneas de investigación que se han detectado y que podrían mejorar el trabajo realizado. Y por último, se describe la planificación y el presupuesto que han sido necesarios para el proyecto.

La organización del documento por capítulos es la siguiente:

**1 Introducción:** en este capítulo se presenta el trabajo que se va a realizar, la motivación, los objetivos que se persiguen resolver y por último la organización del documento con la descripción de cada uno de los capítulos.



**2 Teoría de la optimización:** en este capítulo se trata de forma general en qué consiste la optimización, se define un problema típico de optimización, para luego describir y analizar las técnicas clásicas que existen.

**3 Teoría de la computación evolutiva:** se realiza una introducción a la computación evolutiva, explicando en qué supuestos y pilares se basa y luego se explica en más detalle lo que es un algoritmo genético.

**4 MOEA:** en este capítulo, una vez definido qué es un algoritmo genético, se van a introducir las técnicas que se van a utilizar en este proyecto, los *Multiobjective Evolutionary Algorithms*. Se explica en qué consisten, qué ha llevado a que surja este tipo de algoritmos y, por último, se presenta el algoritmo que se emplea para resolver el problema planteado, el NSGA-II.

**5 Diferencias entre AE y otras técnicas de optimización:** en este apartado se comparan las técnicas tradicionales de optimización contra las técnicas propuestas, los algoritmos evolutivos. Se discuten las ventajas que ofrecen los AE y se dan argumentos para explicar el motivo de su uso.

**6 Teoría moderna de carteras:** en este apartado se va exponer el modelo que propuso Markowitz y las implicaciones que supuso. A continuación se define cuál es el problema de optimización de carteras y, por último, se exponen las medidas de riesgo alternativas que se emplean para crear modelos diferentes al de Media – Varianza.

**7 Métodos de evaluación de los resultados:** en este capítulo se describen las medidas de performance que se han implementado y en qué consisten. Se detallan el ratio de Sharpe, el ratio de Treynor, el Alfa de Jensen y el Alfa del modelo de tres factores de Fama & French.

**8 Descripción de los datos y parámetros empleados:** se emplea este apartado para describir qué tipo de parámetros de entrada se

le han dado al algoritmo genético que se va a utilizar para resolver el problema que plantea este proyecto. También se describen los datos y las fuentes necesarias para ejecutar los modelos planteados.

**9 Evaluación de los resultados:** en este capítulo se analizan los resultados obtenidos por cada modelo. Se trata cada uno de estos modelos en función de la rentabilidad, el riesgo y las medidas de performance cada una de las alternativas con sus variantes. En los modelos que presenten variantes se escoge cuál es la mejor de ellas en función de los resultados medios.

**10 Comparación y selección del mejor modelo:** se desarrollan de forma conjunta todos los modelos planteados y se elige aquel que mejores resultados haya obtenido en media en cada una de las medidas de performance.

**11 Conclusiones y trabajo futuro:** finalmente se extraen todas las conclusiones y detalles que se han observado a lo largo de la realización del trabajo. Se analizan y se proponen mejoras y líneas futuras de investigación que amplíen el trabajo realizado.

**12 Planificación:** en este capítulo se muestra la planificación que se presupuestó al comienzo del proyecto, describiendo las etapas. Luego se detalla la planificación real y se comparará con la planificación inicial.

**13 Presupuesto:** se desglosa el presupuesto del proyecto. Se tiene en cuenta la mano de obra y los materiales y herramientas utilizados en el desarrollo del trabajo.

**Anexo 1:** resumen en inglés del trabajo. En este resumen se hace una introducción del trabajo llevado a cabo, una breve descripción de las técnicas, herramientas y bases sobre las que se fundamenta el proyecto, un análisis de la descripción del mejor modelo, y por último se detallan las conclusiones y trabajo futuro.

**Anexo 2:** en este anexo se muestran todos los resultados obtenidos en todos los modelos y sus variantes.

## 2 Teoría de la optimización

En este capítulo se presenta de forma general en qué consiste la optimización, se define un problema típico de optimización para luego describir y presentar las técnicas clásicas que existen y en qué consisten.

### 2.1 Optimización

La optimización tiene como objetivo el elegir la mejor alternativa de entre un conjunto finito o infinito de posibles soluciones. Consiste en la formulación de un estándar individual de medida que resume el rendimiento o valor de una decisión y la mejora de este rendimiento a partir de la selección de una alternativa del conjunto que se dispone.

El objetivo de un problema de optimización es obtener un mejor rendimiento mientras se avanza hacia un punto o conjunto de puntos óptimos, maximizando o minimizando una determinada función (que determina lo bien o mal que se está haciendo), al mismo tiempo que se satisfacen unas determinadas restricciones inherentes al problema que se plantea.

Formalmente un problema de optimización puede ser representado como la búsqueda del vector  $\vec{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix}$  de parámetros del sistema en consideración, que satisface las  $m$  restricciones de desigualdad

$$g_i(\vec{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

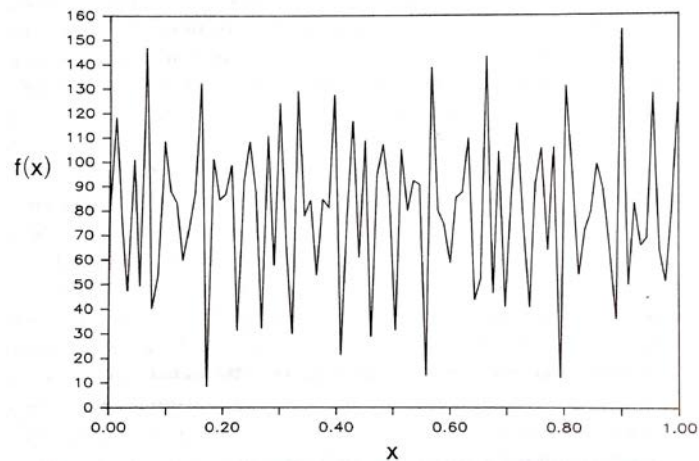
Las  $p$  restricciones de igualdad

$$h_i(\vec{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

Y para los cuales un cierto criterio de calidad  $f(\vec{x})$  (función objetivo) es maximizado y/o minimizado.

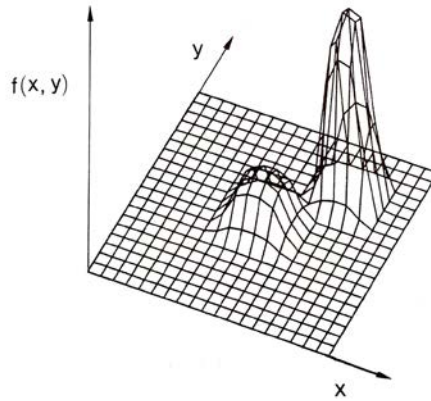
En general, los métodos de optimización desarrollados siguen, como regla, la generación de una secuencia determinista de un conjunto de soluciones basadas en el gradiente u otras técnicas estadísticas de la función de coste. Se ha demostrado [15], que estas técnicas convergen hacia óptimos locales si la función de coste se encuentra bajo condiciones de regularidad y, en algunos casos, llegan a converger de forma exponencial hacia una solución óptima.

El problema de este tipo de métodos es cuando surgen perturbaciones aleatorias, que se imponen a la función que mide el rendimiento, y que obtener óptimos locales, en general, no es suficiente para los problemas del mundo real. Es por ello que se ha de recurrir a lo que se denomina la optimización global.



**Figura 1.** Funciones discontinuas [15]

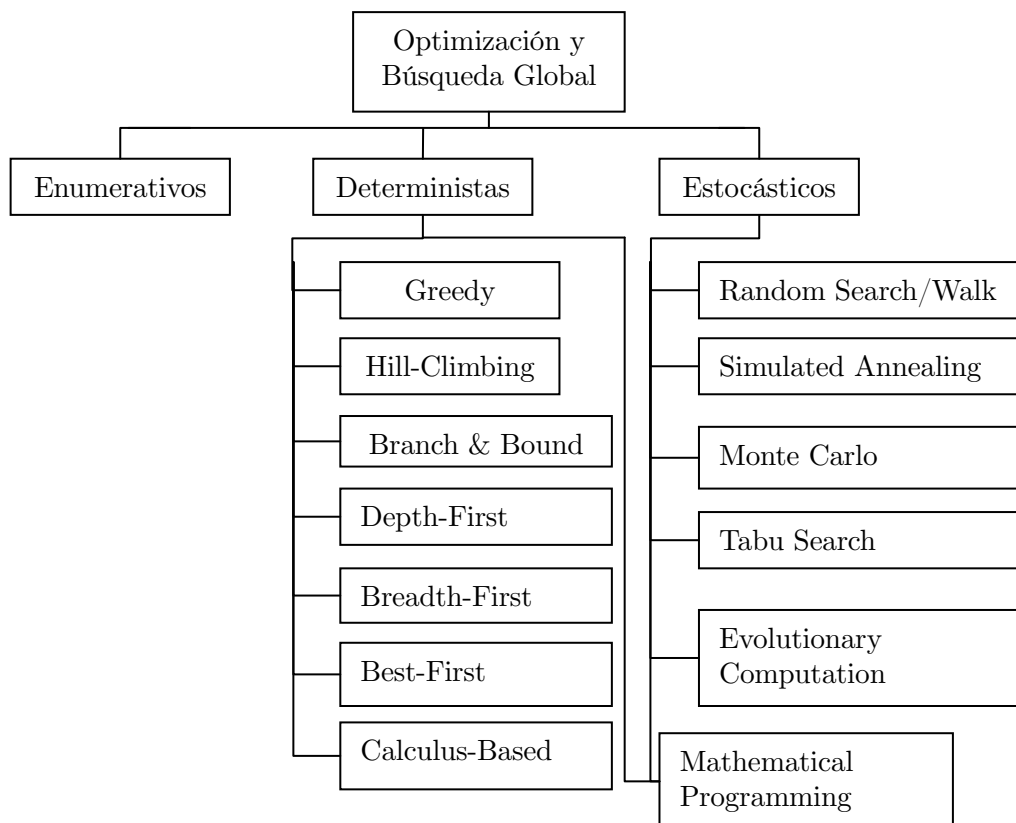
El objetivo de la optimización global es la de encontrar, de forma global, la mejor solución de un modelo. Estos modelos pueden ser no lineales, como se muestra en la figura 1, y además tener múltiples óptimos locales (conocidos o no), como se puede apreciar en la figura 2. Este tipo de optimización se ha utilizado de forma habitual en modelos no lineales como la biotecnología, el diseño avanzado en el campo de la ingeniería, el control de procesos, la gestión del riesgo, etc. Estos campos tienen en común que generalmente requieren un enfoque de búsqueda global.



**Figura 2.** Función con múltiples picos [15]

## 2.2 Optimización clásica

Tradicionalmente se han distinguido tres grandes grupos de métodos de búsqueda: deterministas, enumerativos y estocásticos [15], [12].



**Figura 3.** Esquema de las distintas técnicas de Optimización

Los métodos deterministas han sido ampliamente estudiados y en particular los basados en el cálculo. Estos métodos basados en el cálculo son divididos en dos ramas principales, los métodos de búsqueda directos y los indirectos.

Los directos son los métodos que no requieren de ninguna información sobre el gradiente de la función. Se centran en buscar los puntos que están alrededor del punto actual y tratan de localizar uno que haga que el valor de la función objetivo sea menor que la del punto actual.

La búsqueda indirecta está basada en las derivadas o gradientes de la función objetivo en cuestión. Iguala el gradiente de esta función a cero para así buscar los puntos que tienen pendiente cero en todas las direcciones. Las funciones que cuentan con un solo pico son fáciles de resolver por este tipo de métodos basados en el cálculo.

Otro tipo de métodos son los enumerativos y probablemente sean la estrategia de búsqueda más simple de todas. La idea que hay detrás de este tipo de técnicas es que, dado un espacio finito de búsqueda, o un espacio infinito, pero discretizado, el algoritmo de búsqueda empieza buscando una función objetivo que valora cada punto del espacio de uno en uno. Como se puede ver, este tipo de métodos son muy sencillos y están muy relacionados con el tipo de búsqueda que realizan los seres humanos. Son muy útiles cuando el espacio de búsqueda es pequeño.

Por último, se encuentran los algoritmos de búsqueda estocásticos, que surgieron como una alternativa a las técnicas enumerativas y deterministas porque muchos de los problemas del mundo real, tanto científicos como de ingeniería, son intratables por esas técnicas. Las estrategias de búsqueda más simples son *random search* y *walk search* porque sencillamente se dedican a evaluar un número de soluciones que han sido seleccionadas de forma aleatoria.

Los métodos estocásticos son usados cuando la función es difícil de computar o se desea obtener una solución de forma rápida. Tienen el

inconveniente que en espacios de búsqueda grandes no obtienen mejores resultados que los métodos enumerativos. Dentro de este tipo de técnicas se encuentra el objeto de interés, de este proyecto: la Computación Evolutiva.



### 3 Computación evolutiva

En este capítulo se realiza una introducción a la computación evolutiva, explicando en qué supuestos y pilares se basa y luego se explica en más detalle lo que es un algoritmo genético.

#### 3.1 Introducción

La computación evolutiva es una rama de la Inteligencia Artificial inspirada en la biología, concretamente en la teoría Neo-Darwiniana de la Evolución. La computación evolutiva se basa en la supervivencia de los individuos más fuertes de cada generación y se fundamenta en los estudios de Weismann [49], Mendel [48] y, por supuesto, Darwin [47].

La teoría que propuso Weismann [49], la Teoría del Germoplasma, demostró que la información heredada se transmite a partir de un determinado tipo de células, las germinales, distinguiéndolas así de las que no pueden transmitir ningún tipo de información de una generación a otra. Gracias a esta teoría se evidenció que la hipótesis central de la teoría de Lamarck no se cumplía.

A comienzos del siglo XX, el científico Gregor Mendel [48] publicó sus investigaciones sobre las leyes básicas que gobiernan la herencia, a partir de las cuales surgieron las denominadas Leyes de Mendel (la ley de la segregación, la ley de la independencia y la ley de la uniformidad).

Por último, la teoría Neo-Darwinista está también fundamentada en los estudios de Darwin sobre el origen de las especies, que publicó a mediados del siglo XIX. En su trabajo, Darwin [47] expuso las conclusiones que obtuvo de las observaciones que realizó durante sus viajes, entre las que destaca su teoría de que la evolución se origina a partir de cambios aleatorios de las características hereditarias, todo esto combinado con un proceso de selección natural, base de los Algoritmos Evolutivos [52].

La teoría Neo-Darwinista es el pensamiento actual de la teoría evolutiva con la que se explica el proceso (Darwin) y la herencia (Mendel

[48] y Weismann [49]) que todas las especies han seguido. Puede ser resumida por cuatro procesos: la reproducción, la mutación, la competencia y la selección.

Teniendo en cuenta lo que se ha explicado hasta el momento, la Computación Evolutiva se fundamenta en la teoría Neo-Darwinista y emplea sus técnicas para resolver problemas de optimización. La CE aplica un ciclo de varias etapas que se repite hasta que converge a soluciones buenas y factibles y que son valoradas por una función de *fitness*. Dentro de esta rama se encuentran lo que se denominan Algoritmos Evolutivos.

Los Algoritmos Evolutivos tienen como característica que comienzan con un conjunto de soluciones, la población. Esta población es inicializada de forma aleatoria y está formada por individuos, que son cada elemento (solución) que pertenece a esta población. Estos individuos llevan asociados un vector donde se encuentra codificada la información, siendo posibles diferentes tipos de codificación, como la binaria y la real, entre otras.

Los elementos que al menos forman parte de un Algoritmo Evolutivo son:

- **Representación:** es la definición de los individuos, es decir, cómo conectar el mundo real con el mundo de los Algoritmos Evolutivos. Para esto hay que codificar las posibles soluciones del mundo real en los individuos que serán usados por el AE. Este proceso ha de poder ser realizado a la inversa.
- **Parámetros:** los datos que se le proporcionan al algoritmo para que configure el proceso evolutivo. Número de individuos de la población, generaciones, etc.
- **Población:** el conjunto de individuos (genotipos) que forman parte de las soluciones que se obtienen por cada iteración y que codifican las variables de decisión que forman parte de la función objetivo que evalúa el problema. La población es la unidad que evoluciona mientras que los individuos son objetos estáticos que

no cambian o se adaptan, es la población la que lo hace en su conjunto. El mejor individuo de la población evaluada es elegido para ser la semilla de la siguiente población, también se puede hacer que el peor (o peores) individuo es elegido para ser reemplazado por uno nuevo. La diversidad de la población es una medida del número de diferentes soluciones que hay, es decir, una medida para saber si las soluciones se concentran en torno a un punto del espacio de búsqueda o no.

- **Función de Evaluación:** se trata de una función que se diseña para cada problema en particular y se encarga de medir, en cada ciclo, el desempeño de todos los individuos de la población que se ha generado en dicho ciclo. Con frecuencia se suele hacer referencia a esta función como función *fitness*.
- **Mecanismo de selección de los progenitores:** con este mecanismo se trata de distinguir y seleccionar a aquellos individuos, que según una medida de calidad, serán los progenitores de la nueva generación, a los cuales serán aplicados los operadores de Cruce y Mutación. Es el proceso por el cual se elige a los individuos de acuerdo a una función de evaluación que mide de alguna manera la utilidad o el beneficio que se quiere maximizar o minimizar. Así se permite que, los mejores individuos de la presente generación se conviertan en los progenitores de la siguiente. Este operador es una versión artificial de la Selección Natural y hace uso del concepto de supervivencia del más fuerte.
- **Los Operadores Genéticos:** su función es la de crear nuevos individuos a partir de los anteriores.
  - o **Cruce:** se cruza a los individuos con otros para que den lugar a una nueva población de individuos. Estos heredarán las características de sus progenitores con la esperanza de que generen nuevos individuos que obtengan mejores resultados que sus antecesores.

- **Mutación:** se introduce este operador para que cada generación se modifiquen, de forma aleatoria, algunos individuos. Con este operador se obtienen individuos que no existían en la generación anterior, consiguiendo así una mayor variedad de individuos.

A partir de lo explicado, se puede establecer una relación de paralelismos biológicos en cuanto a la terminología de la Computación Evolutiva y la Teoría Evolutiva. Se resumen en la siguiente tabla [7]:

<b>Naturaleza</b>	<b>Computación Evolutiva</b>
Individuo	Solución a un problema
Población	Conjunto de soluciones
Adaptación	Calidad de la solución (Fitness)
Cromosoma	Codificación de una solución
Gen	Parte de la codificación
Cruce y Mutación	Operadores genéticos de búsqueda

**Tabla 1.** Comparación terminológica entre la Naturaleza y la CE

La Computación Evolutiva se fundamenta en todo lo explicado y con el tiempo han surgido diferentes campos que forman parte de esta rama de la Inteligencia Artificial:

- Algoritmos Genéticos: Holland (1975) [1] propone una herramienta que trata una población de cadenas de dígitos binarios.
- Estrategias Evolutivas: Rechenberg (1973) [11] desarrolla una técnica que trabaja con una población de vectores construidos con números reales.
- Programación Genética: Koza (1992) [9] propone trabajar con poblaciones de árboles de datos.
- Programación Evolutiva: Fogel (1966) [10] trata máquinas de estados finitos.

### 3.2 Algoritmos Genéticos

Los algoritmos genéticos son algoritmos de búsqueda basados en la forma de funcionar de la selección natural y la genética. Fueron desarrollados por John Holland junto a sus colegas y estudiantes en la Universidad de Michigan [1]. El objetivo era abstraer y explicar, de forma rigurosa, el proceso adaptativo de los sistemas naturales y diseñar un sistema artificial que reuniese los mecanismos más importantes de los sistemas naturales.

Estos algoritmos combinan la supervivencia del individuo más fuerte con un intercambio estructurado y aleatorizado de información, para así obtener un algoritmo de búsqueda relacionado con la capacidad del ser humano de realizar este tipo de tareas.

Explotan de forma eficiente la información histórica para alcanzar nuevos puntos de búsqueda, de tal manera, que cada vez que se alcanza un nuevo punto se espera que este sea mejor que el anterior. Así, en cada generación, se busca crear un nuevo conjunto de individuos a partir de los mejores individuos de la generación anterior.

Uno de los principales temas de investigación sobre los algoritmos genéticos ha sido la robusted, es decir, el balance entre la eficacia y la eficiencia necesaria para sobrevivir en entornos muy diferentes y dispares entre sí.

La robusted tiene importantes implicaciones en los sistemas artificiales, pues cuanto más robusto sea un sistema, los costes de rediseño pueden ser reducidos o incluso no llegar a influir en el rendimiento. De esta manera, si se alcanzan altos niveles de adaptación, los sistemas pueden ejecutar sus funciones mejor y durante más tiempo.

Se ha probado que los algoritmos genéticos realizan tareas de optimización robusta en espacios de búsqueda complejos [1], siendo establecidos como una aproximación válida para problemas que requieren obtener soluciones de forma eficiente y eficaz.

Este tipo de técnicas han sido ampliamente usadas en campos tan diversos como la ingeniería, tal como demuestran Arias-Montano et al. (2012) [2] en sus estudios sobre las aplicaciones de estas herramientas a la industria aeronáutica, o los negocios, donde Chih-Hung Wu et al. (2007) [3] aplican los algoritmos genéticos para establecer los parámetros de un Supported Vector Machine, obteniendo así un Genetic Algorithm – SVM (GA-SVM), que puede predecir, de forma más eficiente que otras técnicas, las dificultades financieras de una empresa y en concreto la bancarrota.

Los motivos por los que el número de aplicaciones en las que se aplican algoritmos genéticos está creciendo son porque estas técnicas son computacionalmente simples, a la par que eficaces, en su tarea de buscar resultados que mejoren a los anteriores.

Los algoritmos genéticos no están limitados por asunciones sobre el espacio de búsqueda (cosa que restringen a los métodos de optimización tradicionales) como la continuidad, la existencia de derivadas o la existencia de distribución unimodal, entre otras. Las diferencias entre las técnicas de optimización tradicionales y los algoritmos genéticos serán tratados en posteriores secciones.

Las principales características específicas de los Algoritmos Genéticos son:

- La población se inicializa de forma aleatoria.
- La forma de representar a los individuos de la población normalmente es a partir de una codificación binaria con la que se representarán las posibles soluciones del mundo real, fenotipos, en cada uno de los individuos del Algoritmo Genético, genotipos. Este proceso ha de poder realizarse a la inversa.
- En los Algoritmos Genéticos los mecanismos de selección descritos para los Algoritmos Evolutivos en general, tienen la particularidad que usan selección probabilística.

- El principal operador genético es el cruce, la mutación no es tan relevante, ocurre con una probabilidad muy baja.

La forma de funcionar un AG es la siguiente:

---

**Algoritmo 1** Algoritmo Genético [15]

---

```
1: Comienzo  
2:   INICIALIZAR población de forma aleatoria  
3:   EVALUAR cada candidato  
4:   While != condición do  
5:     SELECCIONAR progenitores de entre la población  
        actual para la nueva población  
6:     RECOMBINAR progenitores  
7:     EVALUAR nuevos candidatos  
8:     SELECCIONAR nuevos individuos para la siguiente  
        generación  
9:   end while  
10: End
```

---

## 4 MOEA

En este capítulo, una vez definido qué es un algoritmo genético, se van a introducir las técnicas que se van a utilizar en este proyecto, los *Multiobjective Evolutionary Algorithms*. Se explica en qué consisten, qué ha llevado a que surja este tipo de algoritmos y, por último, se presenta el algoritmo que se emplea para resolver el problema planteado, el NSGA-II.

### 4.1 Introducción

Hasta el momento se han presentado los conceptos de optimización, las diferentes técnicas tradicionales que se han utilizado para abordar este tipo de problemas y las técnicas inspiradas en la teoría de la evolución, la Computación Evolutiva.

Pero todo esto se ha hecho bajo la asunción de que los problemas que existen son de un sólo objetivo, donde el espacio de búsqueda suele estar bien definido y el resto de objetivos son manejados como restricciones para así simplificar la solución obtenida.

Pero en el mundo real, en general, los problemas que existen involucran más de un objetivo, normalmente en conflicto, para maximizar, minimizar o una combinación de ambas. Es por ello, por lo que surge la Optimización Multiobjetivo.

Entonces la Optimización Multiobjetivo puede ser definida como un vector de variables de decisión, que satisfacen una serie de restricciones, donde se persigue optimizar un vector de funciones objetivos, generalmente en conflicto. Por lo que optimizar en este caso significa encontrar una solución que proporcione un valor a cada una de las funciones objetivo del vector y que sea aceptable [12]. Este problema puede ser formalizado de la siguiente manera:



Encontrar el vector  $\vec{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix}$  que satisfice las  $m$  restricciones de

desigualdad

$$g_i(\vec{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

Las  $p$  restricciones de igualdad

$$h_i(\vec{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

Y que optimice el vector de funciones objetivo  $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \end{bmatrix}$

Se puede observar que, en este tipo de problemas, el concepto de óptimo difiere con lo hasta ahora explicado, pues es muy raro obtener un solo punto que optimice todas las funciones objetivo a la vez. En este caso se trata de obtener un conjunto de puntos que satisfaga todas las funciones objetivo más que una única solución, como ocurría en la optimización global mono-objetivo.

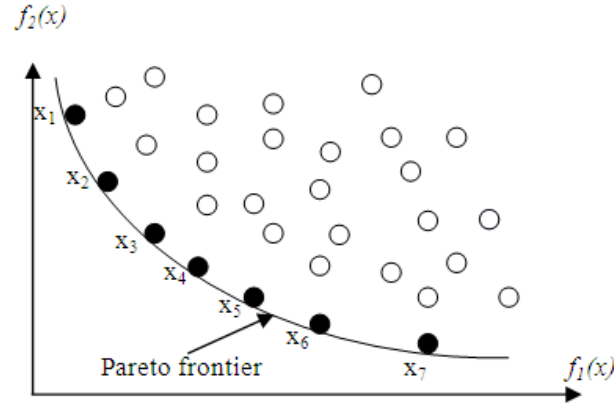
La noción más común y aceptada de óptimo, en el caso de los problemas de Optimización Multiobjetivo, es el propuesto por Edgerworth en 1881, y más tarde generalizado por Vilfredo Pareto, el óptimo de Pareto.

Según este concepto un vector de variables de decisión  $\vec{x}^* \in \mathcal{F}$  es óptimo de Pareto si no existe otro  $\vec{x} \in \mathcal{F}$  tal que  $f_i(\vec{x}) \leq f_i(\vec{x}^*)$  para todo  $i = 1, \dots, k$  y  $f_j(\vec{x}) < f_j(\vec{x}^*)$  para al menos un  $j$ . Esta definición quiere decir que  $\vec{x}^*$  es óptimo de Pareto si no hay un vector de variables de decisión  $\vec{x} \in \mathcal{F}$  factible que podría disminuir algún criterio sin causar un incremento simultáneo en al menos otro criterio.

Aplicar el óptimo de Pareto, la mayoría de las veces, no da una sola solución pero si un conjunto de soluciones llamado conjunto óptimo de

Pareto, es decir, un conjunto de soluciones donde no hay una solución que sea dominada por otras soluciones del espacio de búsqueda.

El conjunto de soluciones óptimas forman lo que se denomina el frente de Pareto. Aunque hay otras formas de aproximar un problema de Optimización Multiobjetivo, la mayoría de los estudios se han concentrado en la aproximación de este conjunto óptimo de Pareto.



**Figura 4.** Frente de Pareto [15]

## 4.2 Uso de Algoritmos Evolutivos en MOP

Se han utilizado numerosas técnicas estocásticas para la resolución de este tipo de problemas multiobjetivos, como las *simulated annealing*, la búsqueda tabú y algoritmo de colonia de hormigas, entre otras. Pero por la forma de trabajar de estos algoritmos, las soluciones que se llegan a obtener muchas veces se quedan atrapadas en óptimos locales o son computacionalmente costosas y, por tanto, no garantizan identificar un frente de Pareto que sea cercano al frente de Pareto real.

Los Algoritmos Evolutivos han demostrado ser útiles a la hora de resolver este tipo de problemas porque trabajan simultáneamente con un conjunto de posibles soluciones, la población, lo que hace que se puedan encontrar múltiples puntos del conjunto óptimo de Pareto en una sola ejecución del algoritmo. En los algoritmos tradicionales ocurre lo contrario, es necesario ejecutar varias veces cada uno de ellos para poder obtener un conjunto de soluciones que construyan el frente de Pareto.

Otro de los motivos de usar un AE es que necesitan muy poca información sobre el problema para poder resolverlo y son menos susceptibles a la forma y la continuidad del frente de Pareto.

El uso de los AE en la resolución de los MOPs ha hecho que surjan una serie de algoritmos conocidos como Multiobjective Optimization Evolutionary Algorithm, MOEA. Éstos empezaron a ser considerados como técnicas eficaces para la resolución de este tipo de problemas a mediados de los 90 y se pueden clasificar en las siguientes clases de algoritmos [12], [13], [14]:

- Algoritmos basados en funciones de agregación.
- Aproximaciones basadas en la población (Population-based approaches).
- Aproximaciones basadas en Pareto (Pareto-based approaches).

Las funciones de agregación son la aproximación más sencilla para manejar múltiples objetivos, se trata de combinar todos los objetivos en uno solo a través de algún método aritmético, como pueden ser la agregación o la multiplicación. Este tipo de técnicas son de hecho uno de los métodos más antiguos de la optimización multiobjetivo.

Las funciones de agregación pueden ser tanto lineales como no lineales, habiendo sido usados estos dos tipos de funciones combinados con AEs con un relativo éxito. Este tipo de técnicas son subestimadas por los investigadores en general, debido a que las funciones de agregación lineales no pueden generar porciones del frente de Pareto que no sean convexas, todo ello a pesar de que las funciones de agregación no lineales pueden ser definidas, de tal manera, que no tengan esa limitación y, por tanto, puedan generar frentes de Pareto cóncavas.

Las *Population-based Approaches* son técnicas en las que la población del AE es usada para diversificar la búsqueda, pero sin incorporar directamente el concepto de dominancia en el proceso de selección. VEGA es el ejemplo de estas técnicas, fue propuesto por Schaffer

[num16] y es eficiente y sencillo de implementar. El problema que tiene este algoritmo es que si se usa selección proporcional, al final, tiende a comportarse como una técnica agregada con lo que al final tiene las mismas limitaciones.

Por el momento, se han descrito técnicas que no están basadas en el concepto de Pareto y el problema que tienen este tipo de técnicas es precisamente eso, que no incorporan directamente ese concepto. Además, las que de algún modo lo incorporan, son incapaces de generar ciertas partes del frente de Pareto y, a pesar de ser eficientes y fáciles de implementar, solo son apropiados para manejar unos pocos objetivos en problemas concretos.

Las técnicas *Pareto-based Approaches* fueron propuestas por Goldberg (1989) [15] para solucionar los problemas que presentaba el algoritmo VEGA, por lo que incorporan el concepto de óptimo de Pareto en su proceso de selección. Estas técnicas usan un proceso de selección y de clasificación (ranking) de no dominancia para hacer evolucionar la población hacia el frente de Pareto.

Requieren de un procedimiento de clasificación (ranking) y una técnica que mantenga la diversidad en la población y, esto último, es importante porque si no el AG tendería a converger hacia una única solución por el ruido estocástico que envuelve el proceso, haciendo que este tipo de algoritmos perdiesen una de las cualidades más importantes de este tipo de técnicas, ofrecer un conjunto de soluciones con una sola ejecución.

De estas últimas técnicas se pueden distinguir dos tipos de algoritmos:

Los desarrollados en un primer momento, más conocidos como los algoritmos de primera generación, se caracterizan por el uso de *sharing*, *niching* y una función de *fitness*, combinados con un ranking de Pareto. Entre los algoritmos de esta generación destacan NSGA (que será desarrollado más adelante, MOGA [18] y NPGA [17].

La segunda generación de este tipo de herramientas introdujo nuevos algoritmos, además de mejorar otros ya existentes. Se incorporó el concepto de elitismo, que se refiere al hecho de usar una población externa para retener a los individuos no dominados. Los algoritmos más característicos de esta generación son SPEA [19], SPEA2 [20], NSGA-II, NPGA2 [21] y Micro-Genetic Algorithm [22].

### 4.3 NSGA-II

Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II) es un algoritmo propuesto por Deb et al. (2002) [50] y es la evolución del algoritmo ya existente, NSGA, propuesto por Srinivas y Deb (1994) [51]. Aunque estos dos algoritmos compartan el mismo nombre guardan poca similitud.

NSGA-II surgió como una mejora a las limitaciones por las cuales el algoritmo original era criticado a pesar de su gran efectividad. Entre los inconvenientes que se le encontraban a este primer algoritmo era su complejidad computacional, su ausencia de elitismo y tener que elegir al inicio el valor óptimo para el parámetro de *sharing*.

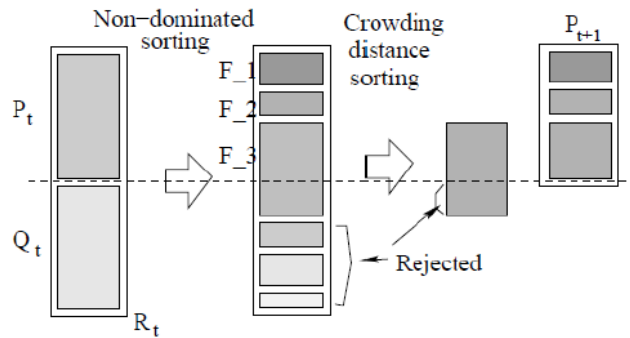
NSGA-II mejora la eficiencia computacional, además de incorporar el concepto de elitismo y un operador (*crowding distance*) para comparar el congestionamiento y mantener la diversidad. Por otro lado evita tener que especificar, *a priori*, un valor para los parámetros adicionales.

La forma en que funciona este algoritmo [23], [12], [13], [14], como se muestra en el Algoritmo 2, es que, como la mayoría de MOEAs, al comenzar crea una población de forma aleatoria. A partir de esa población inicial, y en cada iteración, genera una de descendientes, de igual tamaño, pero, a diferencia de otros algoritmos que extraen un frente no dominado de las poblaciones predecesoras, NSGA-II combina ambas poblaciones para formar un conjunto de padres e hijos, con la consecuencia de que el tamaño de esta combinación será el doble que las poblaciones por separado. De esta manera NSGA-II construye una población de individuos que

compiten, clasificando y ordenándolos de acuerdo a un nivel de no dominancia.

A continuación este algoritmo aplica una serie de operadores de carácter evolutivo: selección binaria por torneos, cruce *Simulated Binary Crossover* (SBX) y mutación polinomial para crear un nuevo *pool* de descendientes y luego combinarlos con los padres y descendientes antes de dividir el nuevo conjunto en diferentes frentes.

Una vez combinadas estas poblaciones, ordenadas por niveles de dominancia y divididas en frentes, se procede a rellenar la población de la siguiente generación y que forma el frente global, tal como muestra la Figura 5, empezando por los individuos del mejor frente, siguiendo con los del mejor segundo frente y así hasta que se llene la población de tamaño  $N$ . Es aquí donde entra el concepto de *crowding distance* para mantener la diversidad del frente global.



**Figura 5.** Esquema de ordenamiento de NSGA2 [50]

Cuando se ha llegado al último frente que va a introducir individuos en el frente global (este último frente puede que tenga más individuos de los que pueda introducir), entonces NSGA-II utiliza una estrategia de nichos combinada con una medida de *crowding* (en lugar de una selección aleatoria de los individuos como hace NSGA y otros algoritmos) para poder estimar la densidad que rodea a un punto y escoger los individuos que estén en las zonas menos pobladas del último frente, para acabar de rellenar la población de la siguiente generación.

---

**Algoritmo 2** NSGA-II [12] [23]

---

```
1: Entrada NSGA-II( $\mathcal{N}'$ ,  $g$ ,  $f_k(x_k)$ ) donde  $\mathcal{N}'$  es el número de individuos
de la población,  $g$  es el número de generaciones y  $f_k(x)$  son las funciones
objetivo
2: Inicializar la población  $\mathbb{P}'$ 
3: Generar una población aleatoria de tamaño  $\mathcal{N}'$ 
4: Evaluar los valores objetivos
5: Asignar un nivel (Rank) en función de la dominancia de Pareto – sort
6: Generar la población de descendientes
7:     Selección Binaria por torneo
8:     Cruce (SBX) y mutación polinomial
9: for  $i = 1$  to  $g$  do
10:     for cada Progenitor e Hijo en  $\mathbb{P}'$  do
11:         Asignar nivel (Rank) en función de Pareto – sort
12:         Generar conjuntos de vectores no dominados a lo
largo del frente de Pareto.
13:         Repetir: añadir soluciones a la siguiente generación
empezando por el primer frente hasta  $\mathcal{N}'$ 
individuos. Determinar crowding distance del
punto a cada frente.
14:     fin for
15:     Seleccionar puntos, mediante elitismo, del frente con el
ranking más bajo y que está fuera de una crowding
distance.
16:     Crear siguiente generación
17:     Selección binaria por torneo
18:     Cruce (SBX) y mutación polinomial
19: end for
20: end
```

---

Donde los operadores genéticos de Cruce (*Simulated Binary Crossover*, *SBX*) la Mutación (*polynomial mutation*) están formalmente descritos por las siguientes expresiones:

**Simulated binary Crossover:** simula el cruce que se observa en la naturaleza.

$$c_{1,k} = \frac{1}{2}[(1 - \beta_k)p_{1,k} + (1 + \beta_k)p_{2,k}] \quad (1)$$

$$c_{2,k} = \frac{1}{2}[(1 - \beta_k)p_{1,k} + (1 + \beta_k)p_{2,k}] \quad (2)$$

Donde  $c_{i,k}$  es el  $i^{th}$  hijo con el  $k^{th}$  componente,  $p_{i,k}$  es el padre seleccionado y  $\beta_k \geq 0$  es un valor aleatorio generado a partir del índice de distribución del cruce. Los padres se obtienen a partir de la siguiente expresión en función de  $\beta$ :

$$p(\beta) = \frac{1}{2}(\eta_c + 1)\beta^{\eta_c}, \text{ si } 0 \leq \beta \leq 1 \quad (3)$$

$$p(\beta) = \frac{1}{2}(\eta_c + 1)\frac{1}{\beta^{\eta_c+2}}, \text{ si } \beta \geq 1 \quad (4)$$

Esta distribución,  $\beta$ , se puede obtener de una muestra aleatoria y uniforme  $u$ , entre  $(0,1)$ . Donde  $\eta_c$  es el índice de distribución para el cruce, que es lo que determina como de bien de bien se transmiten los hijos de los padres.

$$\beta(u) = (2u)^{\frac{1}{(\eta_c+1)}} \quad (5)$$

$$\beta(u) = \frac{1}{[2(1-u)]^{\frac{1}{(\eta_c+1)}}} \quad (6)$$

### Polynomial Mutation:

$$c_k = p_k + (p_k^u - p_k^l)\delta_k \quad (1)$$

Donde  $c_k$  es el descendiente y  $p_k$  es el padre con  $p_k^u$  siendo el límite superior del espacio de decisión del componente del padre,  $p_k^l$  el límite inferior de ese espacio y  $\delta_k$  es una pequeña variación calculada a partir de de una distribución polinómica:

$$\delta_k = (2r_k)^{\frac{1}{\eta_m+1}} - 1, \text{ si } r_k < 0.5 \quad (2)$$

$$\delta_k = 1 - [2(1 - r_k)]^{\frac{1}{\eta_m+1}}, \text{ si } r_k \geq 0.5 \quad (3)$$

Donde  $r_k$  es un número aleatorio de una muestra uniforme entre  $(0,1)$  y  $\eta_m$  es el índice de distribución de la mutación.



## 5 Diferencias entre AE y otras técnicas de optimización

Se han estudiado tanto los métodos tradicionales de la optimización como los métodos basados en la Teoría de la Evolución, los Algoritmos Evolutivos, de forma individual, pero ahora se van a analizar conjuntamente y se van a exponer los motivos por los que se ha optado por realizar una aproximación con técnicas evolutivas al problema que se ha planteado para este proyecto.

Como se ha venido desarrollando, los problemas de optimización se dan en numerosas situaciones y campos del mundo real como la maximización de funciones objetivos (que miden la calidad o el beneficio) o la minimización de funciones, que cuantifican el riesgo, tiempo o coste, y, por ello, el desarrollo de un método generalizado tiene mucho valor.

Se han distinguido tradicionalmente tres tipos de métodos en la optimización: los enumerativos, los deterministas y los estocásticos. Estos difieren en ciertos aspectos con los AE y, además, no cumplen ciertos criterios de robusted [15] (en términos de eficacia y eficiencia) que, en el apartado de los Algoritmos Genéticos, se exige a un buen método de optimización.

Los métodos enumerativos han sido considerados en multitud de problemas, ya que la idea que hay detrás de este tipo de técnicas es muy sencilla, se trata de un tipo de búsqueda muy humana que ha logrado obtener muy buenos resultados cuando el espacio de búsqueda es muy reducido. Sin embargo, ante problemas donde hay que considerar un gran número de soluciones posibles, estos algoritmos ya dejan de cumplir una de las condiciones que inherentes a la robusted, la eficiencia.

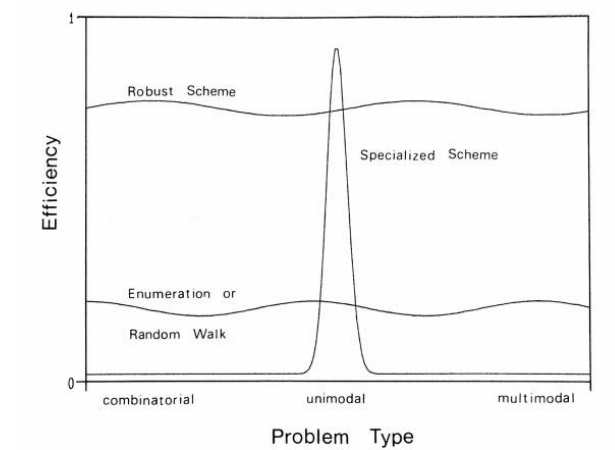
Los algoritmos estocásticos, concretamente los algoritmos tradicionales de *random search* y *random walk*, también son descartados. A la larga no obtienen resultados mejores que un método enumerativo, incumpliendo de nuevo la condición necesaria de eficiencia que se le ha exigido a estos algoritmos.

Respecto a los métodos deterministas, estos tienen como inconveniente que su objetivo de búsqueda es local, es decir, el óptimo que se busca con este tipo de métodos es el mejor en un determinado vecindario alrededor del punto en el que se encuentran.

Ante un problema que presenta varios óptimos de diferente calidad, si se le presenta un punto a estas técnicas en el que sólo uno de los óptimos está presente en el vecindario, los deterministas alcanzarían este óptimo y no tendrían en cuenta que hay otro óptimo de mejor calidad porque, alrededor del punto en el que se encuentran, no hay un punto mejor que el que está el algoritmo.

Para evitar ese problema sería necesario reiniciar el algoritmo en un punto aleatorio y además incorporarles memoria. Además este tipo de técnicas dependen de la existencia de derivadas o gradientes, algo que limita mucho el tipo de problemas que se pueden abordar. Es por esto que este tipo de técnicas son descartadas.

La Figura 4 [num15] muestra la robusted de estos métodos en función del tipo de problema.



**Figura 6.** Espectro de problemas [15]

Como muestra la figura muchos de los esquemas tradicionales trabajan bien en un dominio reducido del problema o problemas de un espacio unimodal. Mientras que los métodos enumerativos y *random walk* y

*random search* son igualmente ineficientes a lo largo del espectro del problema. Un método robusto trabajaría bien a lo largo de este espectro independientemente del tipo de problema que trate.

Como se ha visto, si se usasen los métodos tradicionales de búsqueda local para resolver estos problemas, entonces se dependería del punto de partida para la búsqueda. Esto haría que se cayese con bastante frecuencia en soluciones locales de calidad muy variada. Es por ello, que se necesita abordar el problema desde un punto de vista global para encontrar soluciones óptimas y globales, una característica que ofrecen los métodos de optimización global estocásticos y, en concreto, también los propios de la Computación Evolutiva.

Además, en el mundo real, las funciones objetivos y las restricciones que presenta un problema suelen ser analíticamente intratables o no son dadas de una forma concreta. La aproximación tradicional a este tipo de casos es desarrollar un modelo formal que redefina las funciones objetivo originales, como para que sean tratadas por estos métodos, requiriendo simplificaciones de la formulación original del problema.

Esto implica que un aspecto importante de este tipo de técnicas clásicas radica en el diseño del modelo formal. Aunque este tipo de consideraciones han logrado tener bastante éxito a la hora de resolver muchos problemas, estas mismas son las que han hecho que se busquen nuevas aproximaciones. Las simplificaciones obtienen soluciones que resuelven el problema simplificado pero no el problema original.

Los principios en los que se basan la optimización Evolutiva [15] son diferentes a los de las metodologías tradicionales en los siguientes aspectos:

- Trabajan con un conjunto de parámetros codificado, no con los parámetros en sí mismos.
- Un AE hace la búsqueda desde una población puntos en cada iteración, no desde un solo punto.

- Los AE usan operadores estocásticos, a diferencia de la mayoría de los métodos tradicionales que usan operadores deterministas.
- Las técnicas evolutivas usan la información de una función objetivo, no usan ni derivadas, ni técnicas del gradiente, ni se ven limitados por otros tipos de conocimiento auxiliar.

Respecto al punto en el que los AE trabajan con un conjunto de parámetros codificado quiere decir que estos explotan las similitudes a partir de la codificación de una forma general, teniendo como resultado que no son objeto de las restricciones provocadas por las limitaciones de otros modelos, como la continuidad de la función, la existencia de derivadas y la unimodalidad, entre otras.

Los algoritmos de la Computación Evolutiva realizan la búsqueda desde un conjunto de soluciones, población, en lugar de moverse de un punto a otro en el espacio de búsqueda a partir de una serie de reglas de transición. Moverse de un punto a otro tiene como inconveniente que en espacios multimodales, donde hay muchos óptimos locales, un algoritmo tradicional puede caer en uno de esos óptimos con facilidad, sin ser este el óptimo global.

Al trabajar con una población de individuos en cada iteración los AE pueden alcanzar varios óptimos locales simultáneamente, reduciendo de manera considerable la probabilidad de caer en un falso óptimo respecto a otras técnicas que van de punto en punto.

Los AE, a diferencia de muchos otros métodos, usan operadores estocásticos para guiar la búsqueda. El uso de métodos probabilísticos no implica que el método sea simplemente aleatorio, como lo puede ser el lanzamiento de una moneda. Que los AE usen operadores estocásticos quiere decir que usan la probabilidad como una herramienta para guiar la búsqueda hacia regiones del espacio de búsqueda que pueden mejorar las soluciones encontradas hasta el momento.

Por último, los Algoritmos Evolutivos son ciegos, no necesitan de toda la información auxiliar para poder alcanzar un conjunto de soluciones óptimas, tan sólo requieren del uso de una función que determine lo bien o mal que lo están realizando para realizar una búsqueda realmente efectiva hacia mejores y mejores soluciones.

Al contrario de lo que ocurre con los AE, otras técnicas sí que necesitan mucha información auxiliar para poder trabajar apropiadamente, por ejemplo, las técnicas basadas en el gradiente necesitan calcular las derivadas para poder ser capaces de alcanzar un óptimo. Otro ejemplo son las técnicas propias de la optimización combinatoria, que necesitan acceder a muchos de los parámetros que tienen tabulados.

Al hacer que los AE no necesiten este tipo de información para poder trabajar, se consigue que puedan ser un método mucho más generalista y que trabajen con robusted a lo largo del espectro de problemas que existen. Pero esto no quiere decir que el uso de información externa no mejore sus resultados, esta puede ser incorporada a este tipo de técnicas para así obtener un conjunto de soluciones que se acerquen más aún al óptimo global real.

Además de esto, hay otra diferencia a tener en cuenta, la forma en la que se adaptan las técnicas evolutivas al problema que se maneja. Los Algoritmos Evolutivos no son algoritmos *ready-to-use*, pero sí que pueden ajustarse al problema que se está tratando de resolver y que no puede ser aproximado por la mayoría de las técnicas tradicionales. Esto quiere decir que, una vez que se ha desarrollado un sistema de Computación Evolutiva, este se puede adaptar de forma sencilla e incremental al problema que está bajo consideración, a cambios en los requerimientos del proyecto y a modificaciones del modelo.

Los Algoritmos Evolutivos son un conjunto de técnicas estocásticas que se rigen por los principios de la Teoría Neo-Darwinista de la Evolución. Han tenido un gran auge en los últimos años por la alta variedad de

problemas que son capaces de abordar porque son fácilmente adaptables al problema que se plantea. Y no es necesario asumir restricciones ni simplificaciones de ningún tipo, que hagan que no puedan abordar u obtener una solución que sea realmente útil al problema original.

Además, cumplen unos criterios de robusted sobre eficiencia y eficacia. Son capaces de obtener resultados óptimos en un amplio espectro de problemas. En comparación con los métodos clásicos, los Algoritmos Evolutivos son capaces de obtener una solución global al problema sin caer tanto en soluciones de óptimo local. Gracias al uso de un conjunto de puntos de forma simultánea se puede converger hacia el óptimo global a través del uso de operadores estocásticos, que guían el proceso.

Por último, se ha estudiado que son una técnica muy útil para abordar problemas de optimización multiobjetivo gracias a que son capaces de manejar fácilmente varias funciones objetivo a la vez, al mismo tiempo que hacen uso de todas las características mencionadas.

## 6 Teoría moderna de carteras

En este capítulo se va a presentar el modelo que propuso Markowitz y las implicaciones que supuso, para a continuación definir cuál es el problema de optimización de carteras. Se presentarán las medidas de riesgo alternativas que se emplearán para crear modelos diferentes al de Media – Varianza.

### 6.1 Modelo clásico de Markowitz

La teoría Moderna de Carteras tiene su origen en los estudios que publicó Harry Markowitz en 1952 [25] sobre el proceso de elegir qué activos formarían parte de una cartera. Posteriormente, en 1959 [26], propuso un modelo sobre el problema del diseño y selección de carteras. En sus estudios se evidencia que una cartera de inversión va más allá de ser una simple y larga lista de acciones y bonos.

Harry Markowitz expuso que el análisis de una cartera comienza con la información de los valores de forma individual y finaliza con conclusiones que involucran a la cartera como una sola unidad, no como un conjunto de valores. El objetivo del análisis que propone es el de encontrar aquellas carteras que mejor se adapten a los objetivos del inversor.

Considera que un inversor desea maximizar la rentabilidad de su cartera por un lado, mientras, que por otro, desea minimizar la varianza de los retornos de la cartera en cuestión, quedando un problema de dos objetivos que se enfrentan.

Esta teoría trata a una cartera de inversión como una sola unidad, no como un conjunto de valores o bonos y que, además, podía ser evaluada mediante el cálculo de la media y la varianza de los rendimientos. Tratar este tipo de problemas bajo este punto de vista supuso una revolución que, a día de hoy, sigue siendo objeto de estudio, habiendo surgido multitud de técnicas con las que abordar este problema.

Explica que a la hora de formar una cartera de inversión no se deben ignorar las imperfecciones del mercado, porque estas imperfecciones podrían ofrecer al inversor una cartera diversificada que es preferible a todas las carteras no diversificadas.

Rechaza la hipótesis de que el inversor sólo debería maximizar el valor descontado de los retornos futuros, que son inciertos, porque es una regla que no incorpora el concepto de diversificación, es decir, no tiene en cuenta como se forman los retornos y no considera como esas tasas de descuento han sido decididas o cómo varían a lo largo del tiempo. Esto implica que un individuo invertiría todo su capital en el valor que tuviese la mayor tasa de descuento.

El modelo presentado por Markowitz establece que un inversor puede mezclar tanto el concepto de diversificación, como el hecho de que quiera maximizar el retorno esperado a partir de diversificar el capital entre todos los activos que dan la mayor rentabilidad, para así lograr eliminar el máximo riesgo posible.

El modelo planteado se trata de un modelo estático que trata a los retornos como un flujo de retornos del valor  $i$ , la cartera en su conjunto, en lugar de un modelo dinámico que trata los retornos de cada activo individual,  $(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{ik})$ , a partir de sus series temporales.

Aún así el modelo que se plantea no logra eliminar todo el riesgo de una carteara, se elimina el riesgo diversificable o específico (aquel que afecta de manera específica a un activo o sub-conjunto de activos), pues hay una parte del riesgo que no se puede diversificar, el denominado riesgo de mercado (el riesgo que puede afectar de forma homogénea a una pluralidad de activos) debido a que los activos se encuentran correlacionados. [27]

Se incorporan dos criterios de evaluación de una cartera en su conjunto, el retorno esperado y la varianza de la cartera. Formalmente



Markowitz presenta el modelo de Media-Varianza donde la Varianza es medida como:

$$V(R) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \sigma_{ij} \quad (1)$$

Donde  $\sigma_{ij}$  es la matriz de covarianzas de los activos y esta es necesaria porque se trata de la varianza de una suma ponderada, la de los retornos de la cartera.

$$\sigma_{ij} = E\{[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\} \quad (2)$$

Que de forma más simple puede expresarse en términos de la correlación de los valores,  $\rho_{ij}$ .

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (3)$$

Donde  $\sigma$  es la desviación estándar de los activos de los que se está midiendo la covarianza. Esta covarianza indica la relación que existe entre dos activos aleatorios, midiendo la manera en que estos se mueven si el otro sufre algún cambio.

Si el valor de la covarianza es positivo, quiere decir que los dos activos se mueven en la misma dirección, si uno sube el otro también lo hace. Si es negativo, quiere decir que se mueven en direcciones contrarias. Si es cero o cercano a este quiere decir que puede que los cambios en uno no afecten al otro valor.

Los retornos de la cartera en su conjunto pueden ser expresados como la suma ponderada de los retornos esperados de cada activo,  $\mu_i$ , multiplicado por el peso que se le asigna a cada uno de ellos:

$$E = \sum_{i=1}^N X_i \mu_i \quad (4)$$

Este modelo de Media-Varianza actúa bajo unos supuestos que son las siguientes [24] [27]:

- No hay costes de transacción ni asociados a los impuestos.

- Todos los inversores poseen la misma información.
- Se tiene que invertir todo, es decir, la inversión ha de ser total.
- Los activos son líquidos.
- Las decisiones de comprar o vender no afectan de forma alguna al mercado.
- Los inversores no se ven influenciados por otras variables más que por la rentabilidad esperada y el riesgo de la cartera.
- Los inversores son racionales y adversos al riesgo.
- El modelo se establece para un período de tiempo.

## 6.2 Optimización de Carteras

La optimización de carteras considera que un inversor desea maximizar la rentabilidad de su cartera por un lado, mientras que por otro lado desea minimizar la varianza de los retornos de la cartera en cuestión, quedando un problema de dos objetivos que se enfrentan.

El modelo de Media-Varianza formalmente trata de encontrar el conjunto de carteras que forman la frontera eficiente, como muestra la Figura 7, es decir, el conjunto de carteras que dominan al resto tanto en términos de rentabilidad como de varianza, y como se puede ver se trata de un problema de optimización multiobjetivo donde se pretende:

Minimizar el riesgo asociado a la cartera:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \sigma_{ij} \quad (5)$$

Y maximizar su rentabilidad:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N X_i \mu_i \quad (6)$$

Sujeto a:

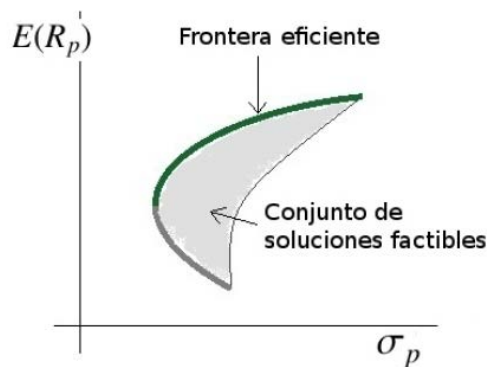
$$\sum_{i=1}^N X_i = 1 \quad (7)$$

$$0 \leq X_i \leq 1 ; i = 1 \dots n \quad (8)$$

Donde  $\mu_i$  es el rendimiento esperado del activo  $i$ ,  $\sigma_{ij}$  es la covarianza que existe entre los activos  $i$  y  $j$ ,  $X_i$  son los pesos que de los activos  $i$  que componen la cartera y  $N$  es el número de activos que la forman.

A partir de este problema, se obtiene un determinado punto del espacio de búsqueda que representa el par de rentabilidad y riesgo para una determinada combinación de las variables de decisión del problema, los pesos  $X_i$ . Variando estos pesos se pueden calcular infinitudes de carteras, que formarían una nube de puntos, donde un conjunto de ellas formarían lo que se denomina la frontera eficiente que dominan al resto de carteras en términos de rentabilidad-riesgo.

El resto de carteras que no forman parte de esta frontera, y son dominadas, forman lo que se llama el conjunto de soluciones factibles. Esta frontera calculada presenta una curva cuya mayor o menor concavidad dependerá de la correlación que haya entre los activos.



**Figura 7.** Conjunto de soluciones factibles [24]

Al problema de optimización multiobjetivo planteado se le pueden añadir más restricciones a parte de las que ya son inherentes al problema planteado por Markowitz. Estas restricciones se han incluido porque, en el mundo real, surgen limitaciones que el modelo clásico no contempla y que tienen que ser tomadas en cuenta a la hora de gestionar una cartera o fondo de inversión. Las que se han añadido al problema planteado en este trabajo son:

- Cardinalidad de la cartera.
- Límites máximos y mínimos a invertir en cada activo.

La primera restricción, la cardinalidad de la cartera, se ha añadido para limitar el número máximo y mínimo de activos en los que se puede invertir, se ha considerado conveniente incluir esta limitación para controlar la diversificación y los costes de transacción asociados a la cartera o fondo.

Los límites máximos y mínimos sirven para establecer las proporciones que se pueden invertir en cada activo, sirven para evitar los costes de transacción, descartando aquellos activos cuyos costes superen a las rentabilidades que se puedan obtener. Se puede tomar como referencia la para estos límites las normativas respecto a los fondos de inversión mobiliaria que existe en cada país del que se parte como referencia.

### 6.3 Medidas de riesgo alternativas

El método clásico de optimización de carteras es el expuesto anteriormente, el modelo de Media-Varianza de Markowitz, este modelo es conocido así porque sólo los dos primeros momentos de la distribución de rentabilidad se tienen en cuenta, la media y la varianza. En este modelo los inversores desean maximizar la rentabilidad esperada, la media, y minimizar la varianza de esta rentabilidad esperada.

Aunque el modelo de Media-Varianza es totalmente correcto de forma teórica, hay algunos problemas asociados al modelo que hacen que sea poco usado en la práctica. Estos problemas son [27]:

1. La función de utilidad del inversor.
2. La inestabilidad y ambigüedad de las soluciones óptimas.
3. Tomar como referencia múltiples períodos.
4. Hay medidas del riesgo más adecuadas.

Se ha observado que en general la función de utilidad de un inversor depende de más factores como son la liquidez o la asimetría, algunos

autores apuntan a que las preferencias de los inversores no son tan racionales como asume el modelo de Markowitz asume.

La inestabilidad o ambigüedad de las soluciones óptimas es una de las limitaciones más importantes que presenta el modelo de Media-Varianza (Michaud, 2008) [28]. Muchos estudios han demostrado que pequeños cambios en los parámetros de entrada estimados producen grandes cambios en la cartera óptima.

El problema del modelo clásico de optimización de MV es que sobreutiliza de forma estadística la información estimada, maximizando el efecto de error de estimación, es decir, la diferencia entre los parámetros reales (media, varianza y covarianza) y los valores estimados de estos parámetros y que el modelo es para carteras con pocos activos.

Por otro lado, este modelo asume un marco de inversión de un solo período cuando hay muchos inversores que tienen como objetivo inversiones a largo plazo, esto hace que el modelo de Markowitz sea una herramienta subóptima para carteras con estos objetivos.

Por último, uno de los problemas que presenta (que tiene relevancia) es que hay otras medidas de riesgo más adecuadas debido a la naturaleza y distribución que siguen los datos. Las medidas de riesgo asimétricas son más adecuadas cuando la distribución de las rentabilidades no son normales, que en el mundo real es lo más frecuente.

Esto demuestra que los inversores destacan la asimetría y que, en general, los profesionales y los inversores tienen más interés en medidas de riesgo como son la Semidesviación, el Value at Risk y el Mean Absolute Deviation.

Este trabajo se va a centrar en la limitación que tiene el modelo de Media-Varianza respecto a la medida de riesgo que se usa, la varianza. Se va a estudiar cómo los modelos de optimización que usan otras medidas, como el Value at Risk y el Mean Absolute Deviation, afectan al

rendimiento y evaluación de una cartera de inversión y si realmente se resuelven parte de las limitaciones del modelo original.

### 6.3.1 Value at Risk

El Value at Risk (VaR) es una medida usada para evaluar el riesgo de una determinada cartera. En su forma más general mide las potenciales pérdidas de valor de un activo o cartera con riesgo en un determinado período de tiempo para un nivel de confianza dado. Matemáticamente se define como [29] [55]:

$$VaR = \zeta_{\alpha}(\xi) = \inf\{\zeta | P(\xi \leq \zeta) \geq \alpha\} \quad (9)$$

Donde  $\alpha$  es el nivel de confianza y  $\xi$  es una variable aleatoria.

La definición de VaR es simple, la máxima cantidad que se puede perder en una inversión en un período particular con una probabilidad específica. A pesar de ello existen tres formas diferentes de calcularlo [30] [31]:

1. El método Varianza-Covarianza.
2. Simulaciones Históricas.
3. Simulaciones de Montecarlo.

En el primer método, se asume que las rentabilidades generadas por la exposición a diferentes riesgos siguen una determinada distribución: Normal, t-Student o una mezcla de ambas. Además se usa la matriz de varianzas-covarianzas de todos los activos para estimar la desviación estándar de las rentabilidades de la cartera, y la relación entre los activos, y calcular, a partir de ellos, el Value at Risk.

Con el segundo método, el de las simulaciones históricas, se expone la cartera a datos históricos y se estima la probabilidad de que las pérdidas excedan valores predefinidos. Con esto, se asume que los valores pasados son representativos del futuro, una restricción no muy realista en los datos.

En el tercer método, simulaciones de Monte Carlo, se asumen distribuciones para las rentabilidades de cada uno de los riesgos de mercado por individual y se llevan a cabo simulaciones de Monte Carlo para calcular el VaR. Estas simulaciones llevan a que este método sea computacionalmente intensivo, con lo errores de las simulaciones pueden llegar a ser considerables.

Independientemente del método utilizado para el cálculo del VaR, este da como resultado las potenciales pérdidas de una cartera, cuyo valor depende del período elegido para mantener los activos en la cartera para un nivel de confianza dado. Aspectos importantes para la elección de este tiempo son la liquidez de los mercados (para asegurar la liquidación de las posiciones) o la probabilidad de que se rebalancee la cartera.

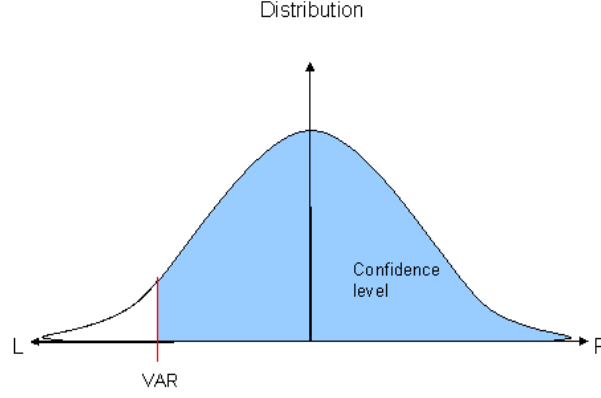
Durante este período temporal se asume que las posiciones que forman parte de la cartera se mantienen invariables, siendo habitual usar espacios temporales de entre un día y un mes, pudiéndose usar otros más largos pero ante el inconveniente de que la cartera que se evalúa no mantenga sus posiciones durante tanto tiempo [32].

En este trabajo se utiliza el VaR como un método para la gestión de riesgos de las carteras generadas y se usará el primer método de cálculo de VaR, la aproximación Varianza – Covarianza, donde se presupone que la distribución de las rentabilidades de los factores sigue una distribución Normal. Además se trata de un método simple de implementar y calcular.

Asumiendo esta distribución normal se puede redefinir el VaR como [29]:

$$VaR = \zeta_{\alpha}(\xi) = \Phi^{-1}(\alpha) = \mu + k(\alpha)\sigma \quad (10)$$

Donde  $\xi$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida,  $\mu$  es la media y  $\sigma$  es la desviación típica. Este VaR sigue una distribución como la de la siguiente figura 8.



**Figura 8.** Distribución VaR

Con todo esto, para calcular el asociado a una cartera, el VaR se define como [56]:

$$VaR_c = \alpha \sigma_c W = \alpha \sqrt{X' \Sigma X} \quad (11)$$

Donde  $X$  es el vector de pesos de una cartera,  $\Sigma X$  es la matriz de Varianzas-Covarianzas de los activos que forman la cartera y  $W$  es la cantidad total invertida.

Una vez explicado el VaR se propone un modelo alternativo al de Media-Varianza en el que se emplea una medida de riesgo diferente a la varianza, el modelo Media-Value at Risk. Este problema de optimización queda formalizado de la siguiente forma:

Minimizar el riesgo asociado a la cartera:

$$VaR_c = \alpha \sigma_c W = \alpha \sqrt{X_i' \Sigma X_i} \quad (12)$$

Y maximizar su rentabilidad:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N X_i \mu_i \quad (13)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1 \quad (14)$$



$$0 \leq X_i \leq 1 ; i = 1 \dots n \quad (15)$$

### 6.3.2 Mean Absolute Deviance (MAD)

El modelo de optimización de carteras de Markowitz entraña una gran complejidad computacional a la hora de construir carteras a partir de un gran número de activos. Esto es debido a la complejidad asociada a resolver un problema de programación cuadrática con una matriz de covarianzas muy densa. Por ello muchos autores han propuesto medidas de riesgo alternativas que reduzcan esta complejidad y puedan transformar el problema de programación cuadrática en un problema de programación lineal, una de estas medidas es la de Mean Absolute Deviance (MAD).

La medida de riesgo Mean Absolute Deviance fue propuesta por Konno (1991) [33] como alternativa al modelo de Media-Varianza, para sustituir a la Varianza como medida de riesgo y poder reducir la complejidad computacional del problema original a uno de complejidad lineal, pero manteniendo un rendimiento similar respecto al original. Esta medida de riesgo propuesta para una cartera es definida como:

$$w(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n (r_{jt} - \mu_j) x_j \right| \quad (16)$$

Donde  $r_{jt}$  es la rentabilidad observada de cada activo,  $\mu_j$  es la media de la rentabilidad de cada activo y T es el número de observaciones de las rentabilidades.

El modelo propuesto trabaja con la misma aproximación de la rentabilidad que el modelo original, la media, pero cambia la aproximación que se hace del riesgo, quedando el siguiente problema de optimización:

Minimizar el riesgo asociado a la cartera:

$$w(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n (r_{jt} - \mu_j) x_j \right| \quad (17)$$

Y maximizar su rentabilidad:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N X_i \mu_i \quad (18)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1 \quad (19)$$

$$0 \leq X_i \leq 1 ; i = 1 \dots n \quad (20)$$

Este modelo ofrece una serie de ventajas que son las siguientes:

1. No es necesario calcular la matriz de covarianzas. Se elimina la complejidad que esto implica y hace que sea más sencillo de actualizar el modelo cuando se añaden nuevos datos.
2. Se resuelve un problema lineal en lugar de un problema de programación cuadrático.
3. Se puede usar T como una variable de control cuando se quiere restringir el número de activos en la cartera.

## 7 Métodos de evaluación de los resultados

Para la evaluación de las carteras generadas a partir del algoritmo NSGA-II se van a usar medidas del ámbito financiero, que calculan el rendimiento que ha tenido un determinado fondo o cartera respecto a una referencia, el índice de mercado. Se hace la comparación contra el índice para determinar lo bien o mal que un gestor de carteras lo hace.

Se podría usar únicamente el retorno de una cartera como medida del rendimiento de la misma, pero este no tiene en cuenta el riesgo que se ha asumido para lograr obtener esa rentabilidad. Además hay que tener en cuenta que, en general, los inversores son aversos al riesgo y, por ello, son mucho más sensibles a este que al retorno que puedan recibir. Por esto, se van a usar ratios que contemplen ambas variables en una sola medida, las medidas de rentabilidad ajustadas al riesgo [34], en concreto las basadas en el CAPM [35] [36]. Estas medidas en general siguen la siguiente estructura:

$$\text{Medida} = \text{rentabilidad} / \text{riesgo}$$

Al estar basadas en CAPM, algunas de estas medidas parten de la ecuación propuesta (21) para calcular la tasa de descuento de la rentabilidad esperada de los activos, carteras o fondos.

$$E[r_p] = r_f + (E[r_m] - r_f)\beta_p \quad (21)$$

Donde  $E[r_p]$  es la tasa de descuento esperada de un activo o cartera,  $r_f$  es la tasa de descuento del activo libre de riesgo, y  $E[r_m]$  es la tasa de descuento esperada del mercado de referencia.

Las medidas propuestas para la evaluación de los resultados son:

- Ratio de Sharpe [37]
- Ratio de Treynor [38]
- Alfa de Jensen [39]
- Alfa del modelo de Tres Factores de Fama & French [40]

Todas las medidas propuestas han sido implementadas tal y cómo propone Jesús David Moreno [41], calculándose los dos últimos métodos, que emplean alfas, mediante una regresión resuelta por *Ordinary Least Squares* (OLS).

## 7.1 Ratio de Sharpe

El ratio de Sharpe [37] es una medida en la que se cuantifica el rendimiento de una cartera de inversión durante un período de tiempo dado. Esta medida fue desarrollada en 1966 por Sharpe y estableció que se podía cuantificar la relación rentabilidad riesgo de una cartera con tan sólo tres datos, la tasa de retorno del activo libre de riesgo, la rentabilidad y la desviación típica de la cartera. Para todos estos datos se ha de usar la media del período que se ha elegido para evaluar.

Para calcular el Ratio de Sharpe se divide la prima de riesgo de la cartera o fondo entre su desviación estándar, tal como se muestra en la siguiente fórmula:

$$S_p = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} \quad (22)$$

Donde  $r_p$  es la media de los retornos de la cartera en el período,  $r_f$  es la media de los retornos del activo libre de riesgo y  $\sigma_p$  es la media de la desviación estándar de la cartera a evaluar.

Para dar sentido a esta medida, el ratio de Sharpe usa la *Capital Market Line* como referencia. Esto quiere decir que, cuando el valor calculado para la cartera se encuentra por debajo de esta línea, es decir, del valor calculado para el mercado, la cartera ha tenido un rendimiento peor que el mercado. Cuanto más alto y por encima del mercado se encuentre la cartera mejor rendimiento habrá tenido.

## 7.2 Ratio de Treynor

Este ratio fue desarrollado por Treynor en 1965 [38] y fue el primero en crear una medida para el rendimiento de una cartera. Este ratio mide el

exceso de rentabilidad de una cartera, por cada unidad de riesgo, mediante el cálculo de la diferencia entre la tasa de rentabilidad de la cartera y la del mercado, para luego dividirlo entre la beta de la cartera, que proviene de la beta calculada en CAPM.

El ratio de Treynor es definido como:

$$T_p = \frac{r_p - r_f}{\beta_p} \quad (23)$$

Donde  $r_p$  es la media de los retornos de la cartera en el período,  $r_f$  es la media de los retornos del activo libre de riesgo y  $\beta_p$  es la beta de la cartera calculada a partir del CAPM.

Para evaluar el rendimiento de una cartera el ratio de Treynor también usa al mercado como referencia. En este caso se usa la *Security Market Line* (SML), teniendo una interpretación similar a la comentada en el ratio de Sharpe.

### 7.3 Alfa de Jensen

Otro índice que se basa en el CAPM, para determinar si un gestor bate a un índice de mercado, es el Alfa de Jensen [39]. Este método fue desarrollado en 1968 y fue la primera medida que se usó para evaluar a los gestores de fondos mutuos.

El alfa de Jensen se usa para determinar el retorno esperado de un activo o cartera, mediante el CAPM. Este índice permite al inversor detectar estadísticamente qué carteras o activos producen retornos anormales respecto al mercado. Hay que tener en cuenta que es importante elegir el índice de mercado, pues el alfa de Jensen de la cartera se compara respecto al índice de mercado.

De acuerdo al CAPM, si se quiere obtener el alfa de Jensen, se hace una regresión lineal de series temporales del retorno del activo ( $r_p - r_f$ ) contra el exceso que la rentabilidad de la cartera tiene contra el índice de referencia. De esto queda:

$$(r_p - r_f) = \alpha_p + (r_m - r_f)\beta_p \quad (24)$$

Donde  $r_p$  es la rentabilidad de la cartera o fondo,  $r_f$  es la tasa de rentabilidad del activo libre de riesgo,  $\alpha_p$  es la medida de rendimiento de la cartera y  $r_m$  es la tasa de retorno del mercado. Con esto, si se despeja el Alfa de Jensen, la ecuación queda como:

$$\alpha_p = r_p - (r_f + (r_m - r_f)\beta_p) \quad (25)$$

Aquí ya se incluye el índice de mercado en el cálculo por lo que esta medida es simple de interpretar. Si alfa es 0, el índice y la cartera se comportan igual y cuanto más grande sea alfa, mejor rendimiento habrá tenido la cartera.

#### 7.4 Modelo de Tres Factores de Fama – French

En el mundo real existe más de un factor que expliquen las tasas de descuento, como así se propone el CAPM a través de la Beta de Mercado. Es por ello que, en el año 1992, Fama & French [40] propusieron dos medidas que explicaban fácilmente las tasas de rentabilidad esperadas de las acciones Estadounidenses, el tamaño de la compañía y su ratio *Book-to-Market*.

En 1993 estos dos autores propusieron un modelo que utilizaba tres factores para explicar los retornos que producía una empresa en el mercado de acciones. Este modelo es conocido como el modelo de Tres Factores de Fama & French y se define como [41]:

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(R_M) + \beta^{SMB}(SMB) + \beta^{HML}(HML)\epsilon \quad (26)$$

Donde  $\alpha_i$  es el valor usado para determinar el rendimiento del activo, cartera o fondo, SMB (*Small Minus Big*) es el retorno medio de la diferencia entre los tres retornos medios de los activos más pequeños frente a los tres más grandes y HML (*High Minus Low*) es el retorno medio de la diferencia entre los dos activos con un ratio *Book-to-Market* mayor y los dos con el menor valor [42].

Al igual que ocurre con el Alfa de Jensen, el Alfa calculado con este modelo ya incluye al índice de mercado de referencia y, por ello, este valor ya da información por si sólo de cómo de bien o mal lo está haciendo una cartera o fondo. Cuanto más alto sea el Alfa calculado mejor rendimiento tendrá la cartera respecto al índice.

## 8 Descripción de los datos y parámetros empleados

En este capítulo se describen las pruebas llevadas a cabo con el algoritmo genético multiobjetivo NSGA-II [23]. Se han usado diferentes modelos de optimización de carteras y para cada uno de ellos se ha usado una configuración determinada de los parámetros del algoritmo genético.

Para la evaluación de los resultados se ha decidido abordar este problema desde un punto de vista financiero y se usarán medidas de performance propias del ámbito de la inversión. Una vez evaluados los resultados se procederá a su análisis y extracción de conclusiones.

Como se describió en el capítulo anterior, se van a usar diferentes modelos de optimización de carteras de inversión, que involucran medidas de riesgo distintas a la propuesta por el modelo original, la Varianza. Se va a realizar así pues, uno de los grandes problemas de este modelo es que, aunque sea teóricamente correcto, existen medidas de riesgo más apropiadas a la naturaleza que en general siguen los datos.

Se considera que los datos que hay en el mundo real, las rentabilidades no siguen una distribución normal. Las medidas de riesgo más apropiadas para este tipo de datos son aquellas que son asimétricas. Entre las medidas alternativas que se han destacado en la literatura se encuentran el Value at Risk y el Mean Absolute Deviation. Estas son las usadas para construir los modelos alternativos que se proponen y que involucran la minimización de una o más de ellas de forma simultánea.

Como para la resolución de este problema se emplean técnicas inspiradas en la Evolución. Se quiere aprovechar la potencia que los Algoritmos Evolutivos ofrecen para resolver problemas de optimización y se utilizará el algoritmo NSGA-II [23], que permite resolver problemas multiobjetivo y, por ello, se han propuesto modelos que maximicen la rentabilidad y, que al mismo tiempo, minimicen una o más medidas de riesgo. Los modelos propuestos para este trabajo frente al modelo tradicional son:



- Modelo Media-Varianza
- Modelo Media-Value at Risk
- Modelo Media-Mean Absolute Deviance
- Modelo Media-Varianza-VaR
- Modelo Media-Varianza-MAD
- Modelo Media-VaR-MAD
- Modelo Media-Varianza-VaR-MAD

## 8.1 Descripción de los parámetros

Cada uno de estos modelos tiene una configuración determinada de los parámetros introducidos al algoritmo y serán especificadas cuando se presenten los resultados. Estos parámetros son:

- Población
- Generaciones
- Nivel de confianza (medida VaR)
- Restricciones mínimas y máximas de cardinalidad
- Restricciones límites superior e inferior de inversión en cada activo

La población inicial y el número de generaciones son necesarios para obtener un conjunto de soluciones óptimo. Esta configuración variará de un modelo a otro debido a la complejidad de cada uno de los problemas y el número de objetivos a tratar.

Por ejemplo, el modelo de Media-Varianza-VaR-MAD tendrá una población mayor y será evolucionado durante un mayor número de generaciones que el modelo de Media-Varianza. Computacionalmente es más complejo y serán necesarios esos parámetros para poder cubrir el espacio necesario para obtener la solución global óptima del problema.

El Valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de las pérdidas potenciales de una cartera de instrumentos financieros y el nivel de confianza es un parámetro propio de esta medida, que indica la probabilidad de que esas pérdidas se produzcan esas pérdidas.

Los niveles de confianza que se han elegido para estas pruebas han sido para un horizonte temporal de un día, que es un horizonte bastante habitual y que asegura que la composición de la cartera no será alterada durante ese tiempo, aunque en este trabajo se sigue una estrategia de *Buy and Holding* de un año.

Esto es justificable en la medida de que este trabajo se considera una base para ampliar y mejorar con los métodos que se proponen en el capítulo de Trabajo Futuro.

Los intervalos de confianza utilizados son los siguientes:

- 1% (99%)
- 5% (95%)
- 10% (90%)
- 40% (60%)

Estos intervalos se han elegido porque son los valores habituales de riesgo que un gestor o inversor, que es adverso al riesgo, estaría dispuesto a asumir.

Además, se ha querido añadir una alta probabilidad de que ocurran pérdidas en las carteras que se van a generar (40%), para observar cómo esta alta probabilidad puede mejorar o empeorar el rendimiento de las carteras de este proyecto. Estos valores se ajustan a los objetivos perseguidos por este trabajo.

En cuanto a las restricciones mínimas y máximas de cardinalidad, se ha usado para todos los modelos los mismos valores, una inversión mínima de cinco activos y una inversión máxima de 25 activos. Con estos valores se quiere asegurar que los costes de transacción no sean relevantes, se puedan amortizar y que se logre una alta diversificación. Con un número entre 20-30 activos se logra diversificar casi todo el riesgo no sistemático de una cartera [54].

Los valores adoptados para los límites superiores e inferiores se han aplicado a todos los modelos. Se encuentran entre una inversión mínima, en cada activo seleccionado por el algoritmo para la cartera, de un 1% y de una inversión máxima de un 46%.

Estos valores han sido elegidos para evitar los costes de transacción y porque se ha tomado como referencia el valor máximo de inversión en un fondo de renta variable nacional, según INVERCO y la CNMV [43]. Se ha usado esta referencia porque no ha sido posible encontrar estos datos para un fondo de renta variable estadounidense.

<i>Requisitos de un FIM_RV_Nacional</i>	
Coeficiente de liquidez	Al menos 3%.
Inversión en activos Renta Variable	100%
Inversión máxima en un determinado activo	46%
Operaciones de venta en descubierto	No permitidas

**Figura 9.** Requisitos de un FIM\_RV\_Nacional

## 8.2 Descripción de los datos utilizados

Se ha escogido el índice Dow Jones 30, y los activos que lo forman, para generar con el algoritmo NSGA-II las carteras con los diferentes modelos. Este índice se ha seleccionado por la facilidad de encontrar los datos y valores necesarios para realizar este trabajo y para poder evaluarlo con medidas como el Modelo de Tres factores de FF.

De este índice, a través de Yahoo! Finance [44] y un código de Matlab [45] adaptado para este caso, se han obtenido las rentabilidades diarias de cada una de las empresas que lo forman a día de hoy.

El período del que se han tomado las rentabilidades diarias comprende desde el 1 de Junio de 1990 hasta el 1 de Junio de 2014, De este modo, se puede hacer una media de la rentabilidad de cada empresa sin que los valores extremos de las crisis que ha habido afecten de manera significativa. Estos datos han sido utilizados como parámetros para el

algoritmo NSGA-II [23] y de ellos se han extraído datos como la matriz de varianzas-covarianzas.

Para la evaluación de las carteras se han usado las rentabilidades diarias de las empresas que forman el índice, el índice y el activo libre de riesgo asociado a este índice y el período de evaluación (que comprende desde el 2 de Junio de 2014 al 1 de Junio de 2015). Durante este intervalo se aplicarán las medidas de performance descritas en el capítulo anterior.

Se ha decidido este período de 1 año porque se considera que, según la estrategia que se ha seguido, *Buy and Holding* de un año, este es el período óptimo para comprobar si las carteras generadas obtienen resultados reales que no son fruto del azar, como puede ocurrir si se usase uno o dos meses. Con ello se pretende evitar resultados distorsionados.

Se ha considerado que el activo libre de riesgo para este mercado es el bono del Tesoro estadounidense a 1 año del mercado secundario, cuya rentabilidad diaria está expresada en términos anuales. Los datos han sido obtenidos de la página de la Reserva Federal Estadounidense [46]. El período usado para el bono del Tesoro es el del período de evaluación anteriormente mencionado.

Por último, para poder realizar la evaluación de las carteras con el Modelo de Tres Factores de FF, ha sido necesario usar los datos diarios del período de evaluación de cada uno de los tres factores, el Risk Market Premium, el SMB y el HML. Los valores diarios de cada uno de estos tres factores han sido obtenidos de la página personal de Kenneth R. French [42]. Estos datos son válidos para los índices del mercado estadounidense.

## 9 Evaluación de los resultados

En esta sección del trabajo se muestran los resultados de cada modelo propuesto para el algoritmo genético NSGA-II. Se analiza de forma individual la evolución de una inversión de mil euros durante el período de evaluación y el rendimiento que se obtiene con cada una de las técnicas de evaluación propuestas anteriormente. Más adelante, se analizarán de forma conjunta y se comprobará si se cumple el objetivo perseguido con este trabajo.

Todas las pruebas se han realizado con una serie de parámetros comunes y, después de varias pruebas, se ha observado que con ese conjunto de parámetros se obtienen mejores resultados que, por ejemplo, usar valores menores a 25 en cuanto a cardinalidad máxima.

Parámetros Comunes	Valor
Cardinalidad Mínima	5
Cardinalidad Máxima	25
Límite inferior	1%
Límite superior	46%

Tabla 2. Parámetros comunes

### 9.1 Modelo Media – Varianza

En este primer modelo, el propuesto por Markowitz, se definieron las funciones objetivo de maximizar la rentabilidad esperada y minimizar la varianza. Además, se atiene a las restricciones de inversión completa, cardinalidad y límites de inversión en un activo.

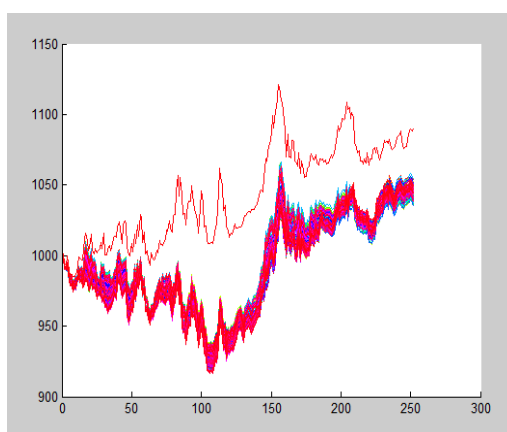
Como parámetros de entrada al algoritmo NSGA-II se utilizan los siguientes valores de población y generaciones, además de los comunes:

Parámetro	Valor
Población	250
Generaciones	150

Tabla 3. Parámetros de entrada modelo Media- Varianza

Estos parámetros son los elegidos para la prueba porque se ha comprobado que con valores superiores el frente de Pareto conseguido no se mejora al que se consigue con estos valores. Con valores menores a estos no se logra alcanzar el frente de Pareto óptimo.

Con esta combinación de parámetros se obtiene una población final de 250 posibles carteras de inversión, a las que si se le aplica una inversión inicial de 1000 euros el 2 de Junio de 2014 y se lleva a cabo una estrategia de *Buy and Holding* hasta el 1 de Junio de 2015, la inversión de todas las carteras evoluciona tal y como muestra el siguiente gráfico:



**Figura 10.** Evolución inversión Media-Varianza

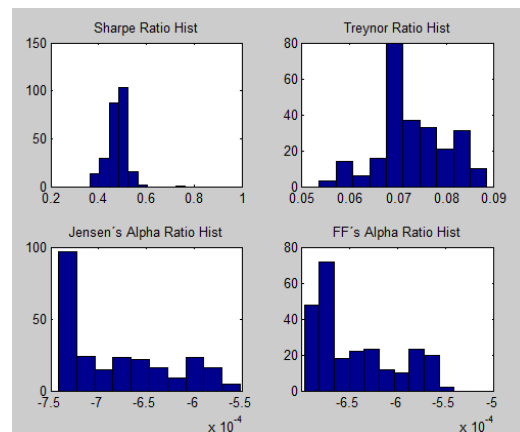
Donde el 1 de Junio de 2015 esa inversión inicial tiene el valor de 1054.22 para la mejor cartera y de 1044.47 de media para el conjunto de carteras generadas con el algoritmo, frente a los 1090.08 obtenidos si se hubiese invertido en el índice de referencia (línea individual del gráfico).

Claramente se observa que se obtiene una rentabilidad mayor al final del período con el índice de referencia que con las carteras generadas con este modelo. Pero no todo es rentabilidad, hay que medir estos niveles de rentabilidad respecto al riesgo que se obtiene al invertir en una u otra oportunidad.

Por otro lado, se observa que las carteras generadas tienen un comportamiento muy similar y que se mueven en un rango muy parecido. Las carteras siguen comportamientos contrarios al del Dow Jones y

consiguen, durante un período, un aumento mayor que el que logra el índice.

Cuando se aplican las medidas de evaluación del rendimiento propuestas, tanto a las carteras generadas como al índice de referencia, se obtienen los resultados de la siguiente gráfica. Esta muestra los resultados de cada una de las carteras para cada medida y además se muestra la distribución que han seguido.



**Figura 11.** Histograma medidas de performance Media - Varianza

En esta gráfica, que combina todos los métodos de evaluación, se aprecia que realmente este modelo no lo hace mejor que el índice de referencia, que es el valor más alto en los ratios de Sharpe y Treynor. En las otras dos medidas se aprecia que no se consiguen valores mayores que cero. Las carteras no baten al mercado y además ninguna lo hace mejor que el Dow Jones en cuanto a rentabilidad ajustada al riesgo.

Medida	'MARKET
'RETURN'	0,0901
'STD'	0,1159
'SHARPE'	0,7638
'TREYNOR'	0,0885

**Tabla 4.** Resultados del índice

Media - Varianza	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5881	0,3647	0,4789	0,4824
'TREYNOR'	0,0881	0,0536	0,0728	0,0714
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,0006	-0,0007
'RETURN'	0,0542	0,0347	0,0445	0,0451
'STD'	0,0976	0,0863	0,0898	0,0884

**Tabla 5.** Resultados modelo Media - Varianza

En los datos ofrecidos por estas dos tablas se comprueba que con el ratio de Treynor las carteras se encuentran muy cercanas al rendimiento del índice, tanto en media como en valor máximo. Por otro lado, tanto con el alfa de Jensen como con el alfa del modelo de tres Factores, se encuentran todos los valores por debajo de cero, pero cercanos, lo que indica un rendimiento peor que el índice, pero próximo.

Por último, hay que destacar que tanto el valor máximo como el valor medio de la desviación estándar se encuentran por debajo del de mercado. Esto indica que se ha logrado reducir el riesgo con este modelo y algoritmo, pero no se ha obtenido la suficiente rentabilidad como para conseguir una rentabilidad ajustada al riesgo mejor que la del índice.

## 9.2 Modelo Media – VaR

En este modelo se ha propuesto sustituir la medida de riesgo de la Varianza por la del Value at Risk, para así poder comprobar que si se cambia la medida de riesgo se pueden mejorar los resultados que da el modelo original y, si por consiguiente, este ser utilizado de forma práctica por los gestores.

Se han implementado las funciones objetivo de maximizar la rentabilidad esperada y minimizar el VaR, para diferentes niveles de confianza. Además, se tienen en cuenta las restricciones de inversión completa, cardinalidad y límites de inversión en un activo que se describieron antes para todos los modelos propuestos.



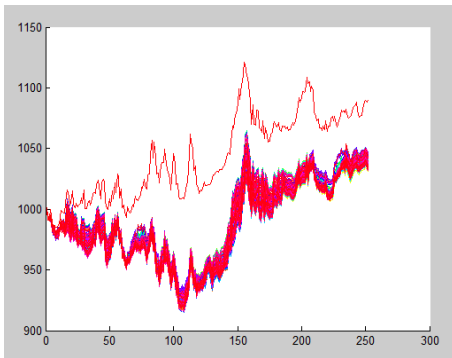
Como parámetros de entrada al algoritmo NSGA-II se han utilizado los siguientes valores de población y generaciones, además de los comunes:

Parámetro	Valor
Población	300
Generaciones	200

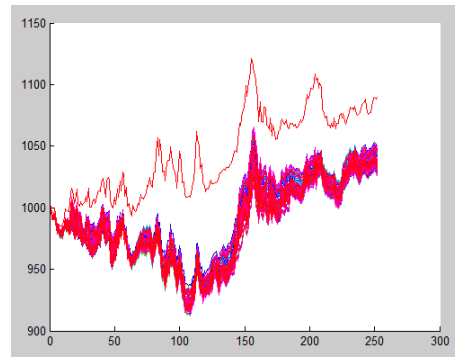
**Tabla 6.** Parámetros de entrada modelo Media - VaR

Estos parámetros son los elegidos para la prueba porque se ha comprobado que con valores superiores el frente de Pareto conseguido no se mejora al que se consigue con estos valores. Con valores menores a estos no se logra alcanzar el frente de Pareto óptimo.

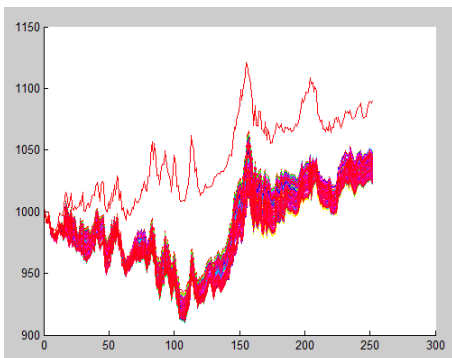
Con estos parámetros de entrada se han obtenido 300 carteras de inversión que, al invertir en ellas 1000 euros al comienzo del período de evaluación, y siguiendo la estrategia propuesta, se obtiene la siguiente gráfica con la evolución de los resultados para cada uno de los intervalos de confianza:



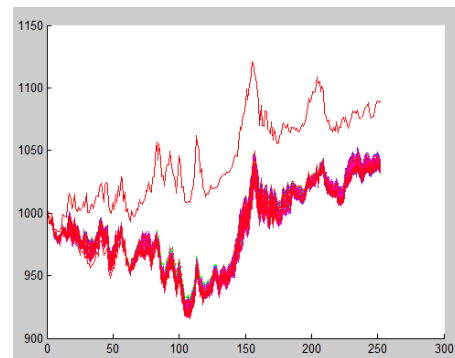
**Figura 12.** Media - VaR 1%



**Figura 13.** Media - VaR 5%



**Figura 14.** Media - VaR 10%



**Figura 15.** Media - VaR 40%

De estas gráficas se extrae que todos los niveles de confianza obtienen una evolución positiva de la inversión inicial, siendo muy similares los resultados al final del período de evaluación, como se muestra en la siguiente tabla:

Intervalo	Máximo	Media
1%	1046.78	1038.29
5%	1049.48	1035.59
10%	1048.35	1033.46
40%	1042.70	1035.95

**Tabla 7.** Rentabilidades media y máxima del modelo Media - VaR

Se observa que la cartera que mayor rentabilidad obtiene es la que pertenece al modelo con un intervalo de confianza del 5%. Sin embargo, la que mayor media en el conjunto de carteras generadas es el modelo con el intervalo del 1%. Pero todos los modelos se encuentran por debajo de lo que da de rentabilidad el índice de referencia, 1090.08.

Ahora, como la rentabilidad no lo es todo, y hay que tener en cuenta el riesgo asumido para alcanzar estos niveles de retorno, en las siguientes tablas se muestran los datos con el rendimiento que han tenido todos los modelos en cuanto a términos de rentabilidad respecto al riesgo. Las obtenidas por el mercado en el período de evaluación son las siguientes:

Medida	'MARKET'
'RETURN'	0,0901
'STD'	0,1159
'SHARPE'	0,7638
'TREYNOR'	0,0885

**Tabla 8.** Resultados del índice

Y los datos obtenidos por el modelo con diferentes intervalos de confianza son:

IC 1%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	<b>0,5146</b>	0,3348	<b>0,4084</b>	0,3927
'TREYNOR'	<b>0,0834</b>	0,0504	<b>0,0624</b>	0,0588
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	<b>-0,0007</b>	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0007	<b>-0,0007</b>	-0,0007
'RETURN'	0,0468	0,0307	0,0383	0,0368
'STD'	0,0978	0,0862	0,0900	0,0894

**Tabla 9.** Resultados modelo Media - VaR 1%

IC 5%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4962	0,2612	0,3770	0,3740
'TREYNOR'	0,0783	0,0387	0,0574	0,0566
'JENSEN 'S ALPHA'	<b>-0,0006</b>	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	<b>-0,0005</b>	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	<b>0,0495</b>	0,0251	0,0356	0,0351
'STD'	0,0976	0,0864	0,0904	0,0899

**Tabla 10.** Resultados modelo Media - VaR 5%

IC 10%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4843	0,2328	0,3536	0,3610
'TREYNOR'	0,0749	0,0357	0,0536	0,0542
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0484	0,0218	0,0335	0,0339
'STD'	0,0976	0,0866	0,0900	0,0891

**Tabla 11.** Resultados modelo Media - VaR 10%

IC 40%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4701	0,3307	0,3884	0,3848
'TREYNOR'	0,0745	0,0489	0,0600	0,0579
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0427	0,0310	0,0359	0,0354
'STD'	0,0931	<b>0,0858</b>	<b>0,0888</b>	0,0887

**Tabla 12.** Resultados media Media - VaR 40%

De acuerdo con los resultados de estas tablas, el modelo propuesto con la medida de riesgo VaR, bajo ninguno de los intervalos de confianza, no obtiene mejor rendimiento que el índice de referencia. Los cuatro

intervalos de confianza tienen resultados similares en cuanto a rentabilidad ajustada al riesgo.

El modelo con el intervalo de confianza del 1% es el que obtiene el mejor resultado en el ratio de Sharpe, tanto en valor máximo como en media. Este ratio se encuentra bastante alejado del obtenido por el índice, debido a la diferencia de rentabilidad que hay entre ambos, a pesar de que la desviación estándar del modelo propuesto es menor que la del mercado. El resto de intervalos tienen resultados cercanos al del 1% en cuanto a máximos, pero en cuanto a media, hay que destacar que el modelo que tiene un intervalo de confianza del 40% tiene una media mayor que los del 5% y el 10%.

De nuevo es el intervalo del 1% el que obtiene el mejor resultado en el ratio de Treynor (seguido del modelo con el intervalo del 5%). La mejor cartera de este modelo logra un resultado muy cercano al alcanzado por el índice, pero si ya se usa la media de todas las carteras generadas, entonces, el resultado se encuentra más alejado del rendimiento del índice. También hay que destacar que el modelo del 40% tiene una media cercana a la del mejor modelo, el del 1%.

En cuanto a las Alfas de Jensen y las Alfas del modelo de tres factores de FF, en todos los casos tienen un valor negativo, lo que indica que todos tienen un rendimiento peor que el del mercado, pero con valores muy cercanos a cero, es decir, cercanos al índice. Ambas Alfas, para todos los modelos, tienen valores casi iguales en cuanto a medias, pero es el modelo del 5% el que obtiene un valor algo mejor que el resto respecto al comportamiento de la mejor cartera. El del IC del 1% es el que mejor resultados logra en resultados medios.

Hay que destacar que todas las carteras generadas consiguen una desviación estándar menor que la del Dow Jones. El valor más bajo de desviación típica es el obtenido por el modelo que emplea un 40% como

probabilidad de pérdidas, contrastando con el concepto que deriva de ello y que ha sido la opción más arriesgada la que ha obtenido el menor valor.

Este modelo logra reducir el riesgo con las carteras generadas, pero no lo suficiente como para batir y obtener una rentabilidad ajustada al riesgo mejor que la del mercado. Esto es debido a la diferencia de rentabilidad obtenida por las carteras y la lograda por el índice durante el período de evaluación.

### 9.3 Modelo Media – MAD

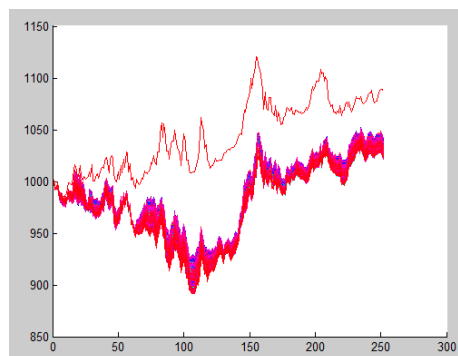
En este modelo se ha propuesto sustituir la medida de riesgo por el *Mean Absolute Deviance*, y así comprobar cómo afecta a la rentabilidad y al rendimiento usar diferentes medidas de riesgo.

Como parámetros de entrada al algoritmo NSGA-II se usan los siguientes valores de población y generaciones, además de los comunes:

Parámetro	Valor
Población	300
Generaciones	200

**Tabla 13.** Parámetros de entrada modelo Media - MAD

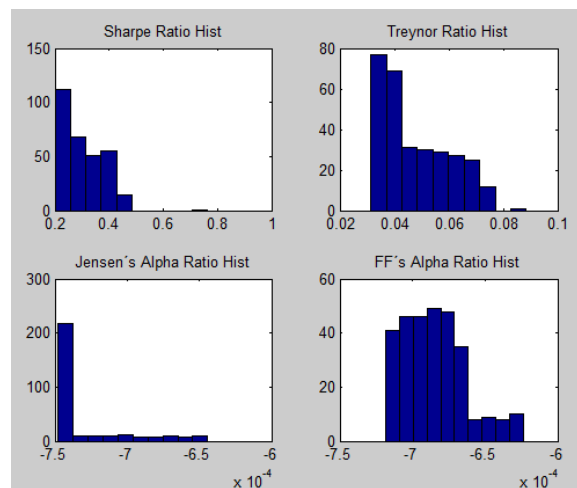
Con esta combinación de parámetros se obtienen 300 carteras de inversión, en las que si se invierte una cantidad inicial de 1000 euros al comienzo del período de evaluación, la inversión de tales carteras sigue la evolución que muestra el siguiente gráfico:



**Figura 16.** Evolución inversión Media - MAD

En términos de rentabilidad la mejor cartera de este modelo logra obtener un valor de 1041.99 y de media se consigue un valor de 1029.69 al final del período. Estos dos valores de rentabilidad se encuentran bastante por debajo de lo que logra el índice de referencia. Se observa que con este modelo las carteras generadas tienen un comportamiento muy similar, se mueven en un rango muy parecido y siguen un comportamiento diferente al que sigue el mercado.

Cuando se aplican las medidas de evaluación del rendimiento propuestas, tanto a las carteras generadas como al índice de referencia, se obtienen los resultados de la siguiente gráfica. Esta muestra los resultados de cada una de las carteras para cada medida y además se muestra la distribución que han seguido.



**Figura 17.** Histograma medidas de performance Media - MAD

Esta gráfica muestra histogramas de todas las medidas de rendimiento en términos de rentabilidad ajustada al riesgo. Se aprecia cómo se distribuyen las carteras para cada una de las medidas y demuestran que no se comportan mejor que el índice.

Se ve la diferencia entre lo que rinde el mercado en el ratio de Sharpe y Treynor (el índice es el valor más alto) y que las Alfas muestran que todas las carteras obtienen valores menores que cero. Además, las carteras generadas, para todas las medidas, se encuentran aglutinadas en un rango de valores.

Medida	'MARKET'
'RETURN'	0,0901
'STD'	0,1159
'SHARPE'	0,7638
'TREYNOR'	0,0885

**Tabla 14.** Resultados del índice

MAD	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4385	0,2024	0,3029	0,2804
'TREYNOR'	0,0736	0,0313	0,0476	0,0433
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0420	0,0208	0,0297	0,0286
'STD'	0,1037	0,0903	0,0938	0,0920

**Tabla 15.** Resultados modelo Media - MAD

Los datos que ofrecen estas dos tablas muestran que ambos ratios, tanto el de Sharpe como el de Treynor, obtienen valores máximos y medios alejados de los que logra el índice. Los valores obtenidos, por el alfa de Jensen y el del modelo de tres factores de FF, indican que se consigue un rendimiento ajustado al riesgo menor que el del mercado en todas las carteras, pero muy cercanos a cero, es decir, las carteras generadas tienen rendimiento muy cercano al del índice.

Por último, hay que destacar que el valor máximo y el medio de la desviación estándar se encuentran por debajo del de mercado, lo que indica que se ha logrado el objetivo de reducir el riesgo con este modelo y algoritmo. No se ha obtenido la suficiente rentabilidad como para conseguir una rentabilidad ajustada al riesgo mejor que la del Dow Jones.

#### 9.4 Modelo Media – Varianza – VaR

Con este modelo se pretende ir un paso más allá, aprovechar la potencia computacional del algoritmo NSGA-II e implementar un problema multiobjetivo con más de dos objetivos, en concreto tres. Al problema de Media – Varianza original se le ha añadido otra medida de riesgo adicional, el Value at Risk, para poder comprobar si añadir diferentes formas de

medir el riesgo como objetivos a minimizar puede mejorar los resultados del problema original y ser utilizado, de forma práctica, por los gestores e inversores.

Las funciones objetivo que se han implementado son la de maximizar la rentabilidad de las carteras y minimizar las dos medidas de riesgo, la Varianza y el VaR, para diferentes niveles de confianza. Se han tenido en cuenta las restricciones de inversión completa, cardinalidad y límites de inversión en un activo.

Los parámetros de entrada para ejecutar el algoritmo NSGA-II y generar las diferentes carteras son:

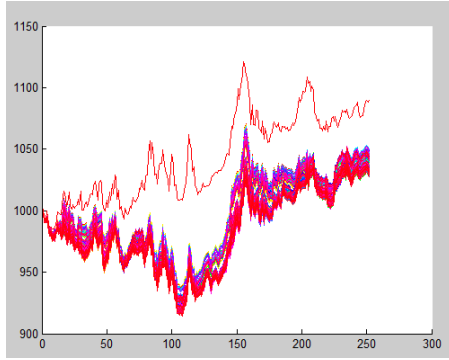
Parámetro	Valor
Población	300
Generaciones	200

**Tabla 16.** Parámetros de entrada modelo Media – Varianza - VaR

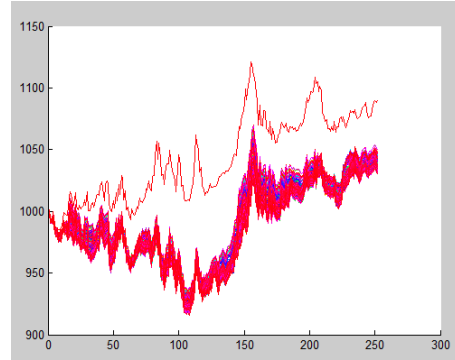
Estos parámetros son los elegidos para la prueba porque se ha comprobado que con valores superiores el frente de Pareto conseguido no se mejora al que se consigue con estos valores. Con valores menores a estos no se logra alcanzar el frente de Pareto óptimo.

Con estos parámetros de entrada se han obtenido 300 carteras de inversión que, al invertir en ellas 1000 euros al comienzo del período de evaluación, y siguiendo la estrategia propuesta, se obtiene la siguiente gráfica con la evolución de los resultados para cada uno de los intervalos de confianza

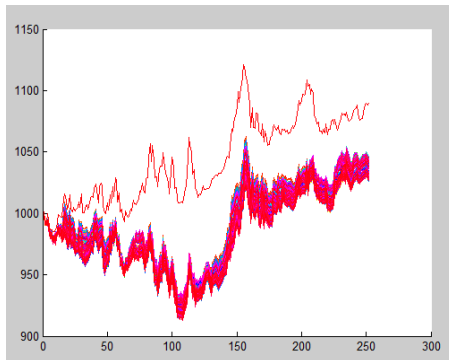




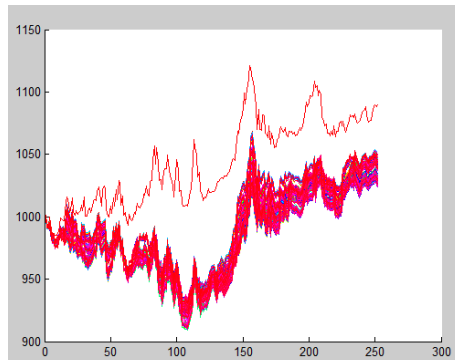
**Figura 18.** Media - Varianza - VaR 1%



**Figura 19.** Media - Varianza - VaR 5%



**Figura 20.** Media - Varianza - VaR  
10%



**Figura 21.** Media - Varianza - VaR  
40%

Con estas gráficas se puede observar que el modelo propuesto obtiene, para todos los niveles de confianza, una rentabilidad positiva al final del período, pero que es menor que la que ofrece el índice. Se puede ver que todas las carteras generadas siguen una tendencia casi igual. Los resultados en cuanto a rentabilidad se resumen en el siguiente cuadro:

Intervalo	Máximo	Media
1%	1049.41	1036.08
5%	1049.74	1037.24
10%	1045.66	1035.96
40%	1049.80	1035.99

**Tabla 17.** Rentabilidades media y máxima del modelo Media - Varianza - VaR

De esta tabla se extrae que todos los intervalos han logrado una rentabilidad muy por debajo de la del mercado (1090.08) y que tres de los intervalos de confianza (los IC del 1%, 5% y 40%) tienen a sus mejores carteras en una horquilla muy cercana. Es destacable que los intervalos que

a priori se muestran más conservadores, y menos arriesgados, tienen una rentabilidad máxima parecida al modelo que sería el más arriesgado y, por tanto, el que en principio tendría que dar mayor rentabilidad. En cuanto a la rentabilidad media obtenida de cada uno de los modelos también tienen niveles similares pero siendo mayor la del intervalo al 5%.

Una vez analizada la rentabilidad, se muestran los datos obtenidos de las medidas. Los resultados del índice en el período de evaluación son los siguientes:

Medida	'MARKET'
'RETURN'	0,0901
'STD'	0,1159
'SHARPE'	0,7638
'TREYNOR'	0,0885

**Tabla 18.** Resultados del índice

Y los resultados de las carteras generadas para cada uno de los intervalos de confianza son:

IC 1%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4989	0,2786	0,3838	0,3720
'TREYNOR'	0,0773	0,0413	0,0590	0,0577
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0494	0,0266	0,0361	0,0339
'STD'	0,0984	0,0863	0,0900	0,0890

**Tabla 19.** Resultados Modelo Media - Varianza - VaR 1%

IC 5%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4938	0,3027	<b>0,3969</b>	0,3853
'TREYNOR'	0,0798	0,0444	<b>0,0611</b>	0,0575
'JENSEN'S ALPHA'	<b>-0,0005</b>	-0,0008	<b>-0,0007</b>	-0,0007
'FF'S ALPHA'	<b>-0,0005</b>	-0,0007	<b>-0,0007</b>	-0,0007
'RETURN'	0,0497	0,0296	0,0372	0,0359
'STD'	0,0985	<b>0,0860</b>	0,0901	0,0891

**Tabla 20.** Resultados Modelo Media - Varianza 5%

IC 10%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4906	0,2724	0,3833	0,3900
'TREYNOR'	0,0785	0,0402	0,0590	0,0576
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0457	0,0255	0,0360	0,0372
'STD'	0,0983	0,0861	<b>0,0898</b>	0,0894

**Tabla 21.** Resultados Modelo Media - Varianza 10%

IC 40%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	<b>0,5225</b>	0,2464	0,3819	0,3920
'TREYNOR'	<b>0,0841</b>	0,0372	0,0592	0,0576
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	<b>0,0498</b>	0,0232	0,0360	0,0373
'STD'	0,0991	0,0867	0,0902	0,0896

**Tabla 22.** Resultados Modelo Media - Varianza 40%

Según los datos obtenidos, ninguno de los intervalos de confianza del modelo propuesto logra obtener un mejor rendimiento que el índice de referencia, ni en términos de rentabilidad ni en términos de retorno ajustado al riesgo. De los cuatro intervalos de confianza analizados, el que mejor resultados obtiene, en cuanto a máximos, es el IC del 40% pero en medias el mejor es el modelo de IC del 5%.

El ratio de Sharpe desvela que la mejor cartera pertenece al modelo del IC del 40% pero en su conjunto el que mejor resultados logra es el IC del 5%. Ambos están bastante alejados del valor obtenido por el mercado debido a la diferencia de casi cuatro puntos porcentuales que hay entre las carteras generadas y el índice.

Con el ratio de Treynor se observa que los resultados son muy cercanos al rendimiento ofrecido por el mercado. La del modelo con un IC del 40% es el más alto, con un valor casi igual que el obtenido por el índice. En media el modelo que mejor rendimiento obtiene es, al igual que indicaba el ratio de Sharpe, el del IC del 5% pero encontrándose ya más alejado de lo que logra el índice con este ratio.

El modelo, con todos sus intervalos de confianza, obtiene resultados negativos tanto en el Alfa de Jensen como con el Alfa del modelo de tres factores de FF. Esto indica que la cartera rinde por debajo de lo que lo hace el Dow Jones, pero logrando un valor muy cercano a cero, lo que muestra que las carteras tienen un rendimiento cercano al índice. Ambas alfas logran resultados muy parecidos entre ellas, sin haber grandes discrepancias tanto en valores máximos como en los medios. El IC que mejor resultado ha obtenido para ambas Alfas es el del 5%, seguido del IC con el 40%.

Las mediciones de la desviación estándar muestran que todos los modelos logran un valor de desviación bastante menor que el índice. En esta ocasión el modelo que consigue un resultado más bajo es el de IC del 10%.

Esto último indica que se logra unos modelos bajos en riesgo, pero se demuestra que esto no es suficiente como para conseguir mejorar el rendimiento que ofrece el mercado en cuanto a rentabilidad ajustada al riesgo y, en gran parte, porque las carteras no baten al índice en rentabilidad, además existe una gran diferencia de rentabilidades.

## **9.5 Modelo Media – Varianza – MAD**

Con este modelo se combina el modelo que propuso Markowitz con una de las medidas de riesgo expuestas, el MAD. Se quiere aprovechar la potencia del algoritmo NSGA-II para optimizar un problema multiobjetivo.

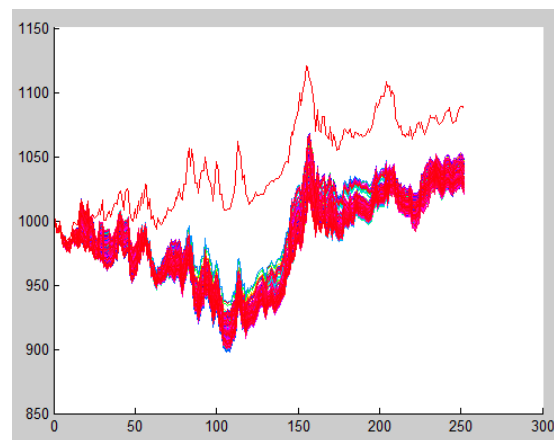
Se han implementado las funciones objetivo de maximizar la rentabilidad esperada y minimizar la Varianza y el MAD, teniendo en cuenta las restricciones anteriormente descritas.

Como parámetros de entrada al algoritmo NSGA-II se han utilizado los siguientes valores de población y generaciones, además de los comunes:

Parámetro	Valor
Población	400
Generaciones	300

**Tabla 23.** Parámetros de entrada modelo Media – Varianza - MAD

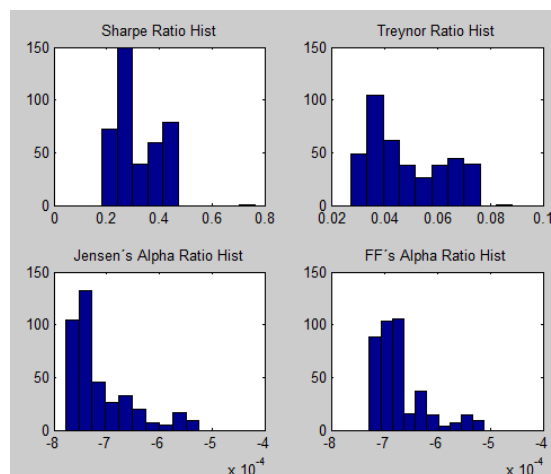
Con esta combinación de parámetros se han obtenido 400 carteras, en las que si se invierte una cantidad inicial de 1000 euros al comienzo del período de evaluación, la inversión de tales carteras sigue la evolución que muestra el siguiente gráfico:



**Figura 22.** Evolución inversión Media – Varianza - MAD

En términos de rentabilidad la mejor cartera de este modelo logra obtener un valor de 1047.99 y de media se consigue un valor de 1030.74 al final del período. Estos dos valores de rentabilidad se encuentran bastante por debajo de lo que llega a lograr el índice de referencia. Se observa que, con este modelo, las carteras generadas tienen un comportamiento muy similar, que se mueven en un rango muy parecido y siguen un comportamiento diferente al del mercado.

Cuando se aplican las medidas de evaluación del rendimiento propuestas, tanto a las carteras generadas como al índice de referencia, se obtienen los resultados de la siguiente gráfica. Esta muestra los resultados de cada una de las carteras para cada medida y además se muestra la distribución que han seguido.



**Figura 23.** Histograma medidas de performance Media - Varianza - MAD

Esta gráfica muestra histogramas de todas las medidas de rendimiento propuestas, se aprecia cómo se distribuyen las carteras para cada una de las medidas y demuestra que no se comportan mejor que el índice. Se ve la diferencia entre lo que rinde el mercado y las carteras con el ratio de Sharpe y Treynor y que las Alfas muestran que todas las carteras obtienen valores menores que cero.

Medida	'MARKET'
'RETURN'	0,0901
'STD'	0,1159
'SHARPE'	0,7638
'TREYNOR'	0,0885

**Tabla 24.** Resultados del índice

Varianza-MAD	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4665	0,1815	0,3133	0,2835
'TREYNOR'	0,0753	0,0274	0,0487	0,0433
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0480	0,0200	0,0307	0,0280
'STD'	0,1063	0,0880	0,0938	0,0918

**Tabla 25.** Resultados del Modelo Media - Varianza - MAD

Tanto el ratio de Sharpe como el de Treynor obtienen valores máximos y medios alejados de los que obtiene el índice. Los valores logrado por el alfa de Jensen y el modelo de tres factores de FF indican que se

consigue un rendimiento ajustado al riesgo menor que el del mercado pero muy cercanos a cero, es decir, que las carteras generadas logran un rendimiento muy próximo al del índice.

Por último hay que destacar que tanto el valor máximo como el valor medio de la desviación estándar se encuentran por debajo del de mercado, es decir, que se ha logrado el objetivo de reducir el riesgo con este modelo y algoritmo pero que no se ha obtenido la suficiente rentabilidad como para conseguir una rentabilidad ajustada al riesgo mejor que la del Dow Jones.

## 9.6 Modelo Media – VaR – MAD

Para este modelo se ha propuesto volver a hacer uso de las posibilidades que ofrece el uso del algoritmo NSGA-II para esta clase de problemas. Se vuelve a implementar un problema de optimización que involucra tres objetivos. Se sustituye la medida de riesgo del modelo original y se incluyen las otras dos medidas de riesgo que se analizan en este trabajo, el VaR y el MAD.

Las funciones objetivo que se han implementado para este problema son maximizar la rentabilidad esperada y minimizar el *Mean Absolute Deviance* y el VaR para diferentes niveles de confianza. Teniendo en cuenta que la inversión es completa, la cardinalidad y los límites de inversión en un activo.

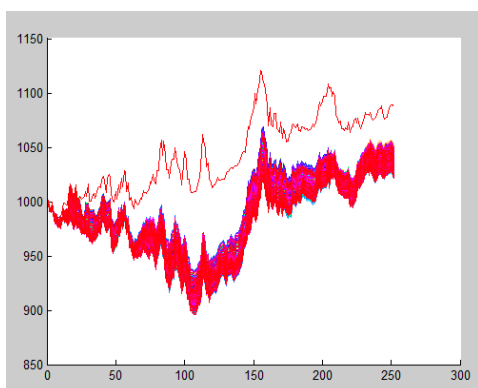
Al algoritmo se le han aplicado como parámetros de entrada los siguientes valores de población y generaciones:

Parámetro	Valor
Población	600
Generaciones	300

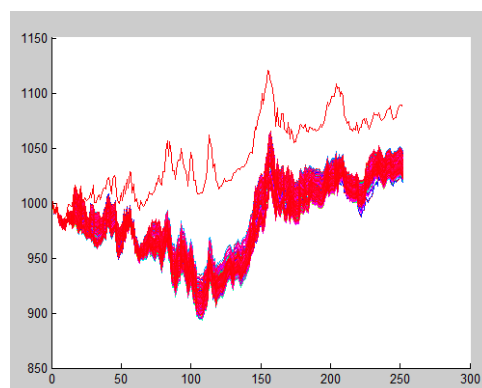
**Tabla 26.** Parámetros de entrada modelo Media – VaR – MAD

Con esta combinación de parámetros se han obtenido 600 carteras, en las que si se invierte una cantidad inicial de 1000 euros al comienzo del

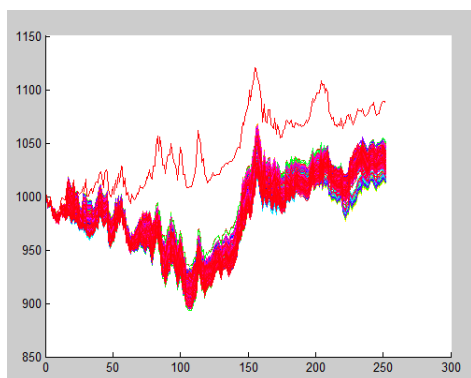
período de evaluación, la inversión de tales carteras sigue la evolución que muestra el siguiente gráfico:



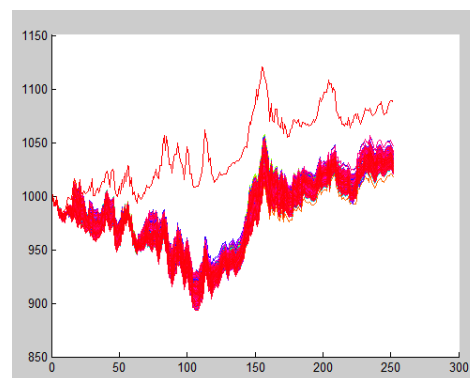
**Figura 24.** Modelo Media - VaR -  
MAD 1%



**Figura 26.** Modelo Media - VaR -  
MAD 5 %



**Figura 25.** Modelo Media - VaR -  
MAD 10%



**Figura 27.** Modelo Media - VaR -  
MAD 40%

Como se puede observar en las gráficas, el modelo propuesto para todos los intervalos de confianza tiene una evolución positiva de la inversión durante el período de evaluación, teniendo un comportamiento casi igual.

Intervalo	Máximo	Media
1%	1050.35	1034.61
5%	1047.13	1030.96
10%	1051.08	1030.82
40%	1046.31	1030.43

**Tabla 27.** Rentabilidades media y máxima del modelo Media – VaR - MAD



La cartera que más rentabilidad obtiene en el período de evaluación es la que pertenece al intervalo de confianza del 1%, seguido muy de cerca del IC del 10%. Por otro lado se observa que el modelo con un IC del 1% es el que obtiene una mayor rentabilidad media. Todo esto sin batir al índice y teniendo una rentabilidad por debajo de lo que se obtiene con el mercado, 1090.08.

Ahora, una vez descrita la evolución de la rentabilidad, se procede a analizar el comportamiento de las carteras en cuanto a rentabilidad respecto al riesgo, los datos obtenidos por el mercado con las medidas propuestas son:

Medida	'MARKET'
'RETURN'	0,0901
'STD'	0,1159
'SHARPE'	0,7638
'TREYNOR'	0,0885

**Tabla 28.** Resultados índice

Y los datos obtenidos por el modelo con diferentes intervalos de confianza son:

IC 1%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4990	0,1989	<b>0,3551</b>	0,3537
'TREYNOR'	0,0767	0,0301	<b>0,0551</b>	0,0542
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	<b>-0,0007</b>	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	<b>-0,0007</b>	-0,0007
'RETURN'	0,0503	0,0204	<b>0,0346</b>	0,0343
'STD'	0,1049	0,0868	0,0931	0,0913

**Tabla 29.** Resultados Modelo Media - VaR – MAD 1%

IC 5%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4664	0,1544	0,3164	0,3135
'TREYNOR'	0,0752	0,0233	0,0488	0,0478
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0471	0,0179	0,0310	0,0302
'STD'	0,1078	0,0869	0,0930	0,0910

**Tabla 30.** Resultados Modelo Media - VaR – MAD 5%

IC 10%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	<b>0,5085</b>	0,0849	0,3136	0,3031
'TREYNOR'	0,0755	0,0128	0,0487	0,0462
'JENSEN'S ALPHA'	<b>-0,0005</b>	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF'S ALPHA'	<b>-0,0005</b>	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	<b>0,0511</b>	0,0111	0,0308	0,0299
'STD'	0,1124	<b>0,0867</b>	0,0942	0,0917

**Tabla 31.** Resultados Modelo Media - VaR – MAD 10%

IC 40%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4848	0,1736	0,3135	0,2881
'TREYNOR'	<b>0,0813</b>	0,0270	0,0490	0,0439
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0463	0,0168	0,0304	0,0289
'STD'	0,1052	0,0874	<b>0,0925</b>	0,0909

**Tabla 32.** Resultados Modelo Media - VaR - MAD 40%

Según los datos obtenidos, ninguno de los intervalos de confianza del modelo propuesto logra mejorar el rendimiento del mercado con las medidas propuestas. De los cuatro intervalos analizados, el que mejor resultados logra en cuanto a máximos es el IC del 10%. En cuanto a resultados medios, el mejor es el IC del 1%.

La medida de Sharpe muestra que la cartera que mejor se comporta es la que pertenece al modelo del IC del 10%. En media, la que mejor resultados obtiene es la del IC del 1%. Ambos valores se encuentran alejados de lo que llega a rendir el índice de referencia. Estos resultados son debidos a que la rentabilidad obtenida por las carteras son casi cuatro puntos y medio porcentuales menor que la rentabilidad obtenida por el mercado, a pesar de que la desviación típica es menor.

El ratio de Treynor revela que las carteras de este modelo se encuentran más alejadas del rendimiento que ofrece el mercado, tanto para los resultados de las mejores carteras como para los valores medios de todas las carteras generadas para cada IC. La mejor cartera pertenece al modelo con el intervalo de confianza del 40% y en media el mejor IC el del

1%. Al igual que el ratio de Sharpe, esta medida se ve muy influenciada por la rentabilidad obtenida.

Respecto al Alfa de Jensen y el Alfa del modelo de tres factores de FF, ambas se encuentran por debajo del valor cero para todas las variantes de este modelo. Esto indica que se ha obtenido un rendimiento por debajo del que ha obtenido el índice. No hay casi diferencia entre los valores que se obtienen con ambas medidas y las dos indican que la mejor cartera es de los IC del 1% y del 10%. De media todas las carteras obtienen resultados muy similares. Hay que destacar que estas dos medidas indican que las carteras generadas han tenido peor rendimiento pero muy cercano a lo que ha hecho el índice.

La medición del riesgo, realizada a través de la desviación típica, de las carteras generadas muestra que todos los modelos consiguen un valor menor que el que obtiene el Dow Jones, tanto en medias como en valores mínimos. La mejor cartera en cuanto a riesgo pertenece al IC del 10%, pero con un valor casi igual que los IC del 1% y del 5%. En el conjunto de las carteras el mejor resultado lo obtiene el intervalo de confianza del 40%, lo que es sorprendente, pues contrasta con lo que representa un intervalo así respecto al resto.

Este modelo ha vuelto a lograr obtener un riesgo menor que el riesgo que ha conseguido el mercado pero esto no es suficiente como para que las carteras generadas obtengan un rendimiento ajustado al riesgo superior al índice. En gran medida es debido a que las posibilidades de inversión obtenidas no han logrado una rentabilidad tan alta como la del índice.

## **9.7 Modelo Media – Varianza – VaR – MAD**

En este último modelo se ha propuesto resolver el problema de optimización de carteras haciendo uso de todas las medidas de riesgo propuestas en este trabajo. Se ha decidido hacer uso de la potencia que ofrece el uso del NSGA-II para resolver problemas que involucran varios

objetivos a la vez y poder verificar, si añadir diferentes formas de medir el riesgo, logra obtener buenos resultados en cuanto a rendimiento.

Las funciones objetivo que se han implementado son las de minimizar las medidas de riesgo propuestas, Varianza, *Mean Absolute Deviance* y Value at Risk y maximizar la rentabilidad esperada de las carteras, teniendo en cuenta las restricciones descritas anteriormente.

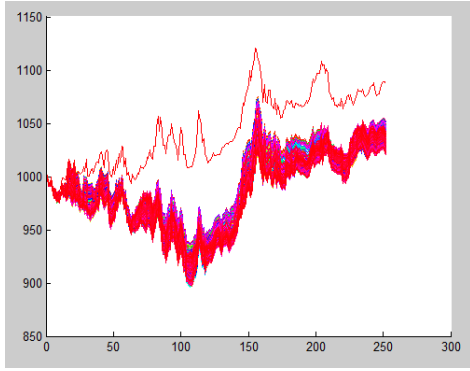
Los parámetros de entrada para ejecutar el algoritmo NSGA-II y generar las diferentes carteras son:

Parámetro	Valor
Población	600
Generaciones	300

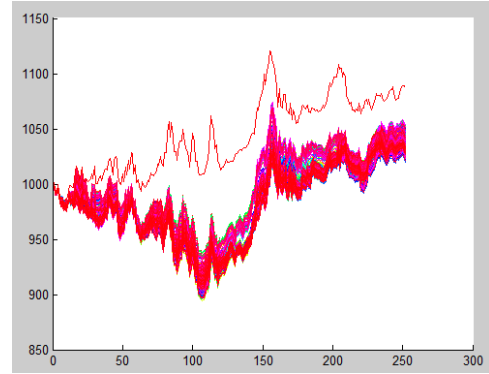
**Tabla 33.** Parámetros de entrada modelo Media – Varianza - VaR - MAD

Estos parámetros han sido los elegidos para la prueba porque se comprobó que con valores superiores el frente de Pareto conseguido no mejoraba al que se obtenía con estos valores. Además, son los más altos pues involucran más funciones objetivos y, por ello, se ha necesitado evolucionar durante más generaciones una mayor población para obtener el frente de Pareto óptimo.

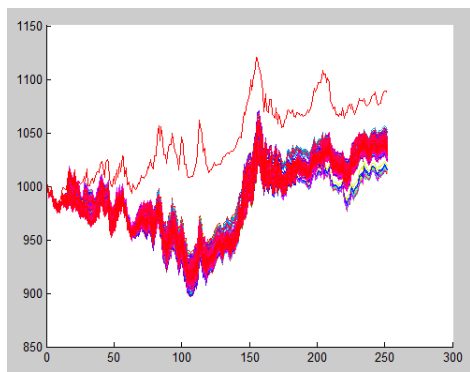
Con esta combinación de parámetros se han obtenido 600 carteras, en las que si se invierte una cantidad inicial de 1000 euros al comienzo del período de evaluación, la inversión de tales carteras sigue la evolución que muestra el siguiente gráfico:



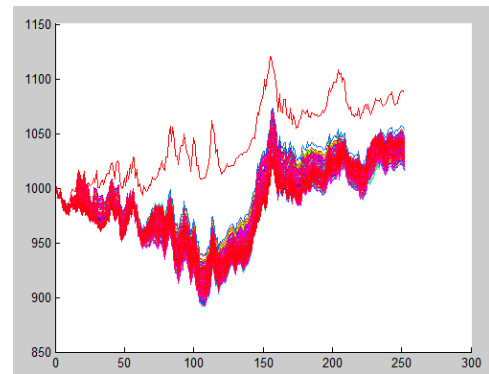
**Figura 28.** Modelo Media – Varianza –  
VaR – MAD 1%



**Figura 30.** Modelo Media – Varianza –  
VaR – MAD 10%



**Figura 29.** Modelo Media – Varianza –  
VaR – MAD 5%



**Figura 31.** Modelo Media – Varianza –  
VaR – MAD 40%

Con estas gráficas se puede observar que el modelo propuesto obtiene, para todos los niveles de confianza, una rentabilidad positiva al final del período, pero que es menor que la que ofrece el índice. Se puede ver que todas las carteras generadas siguen una tendencia casi igual. Los resultados en cuanto a rentabilidad se resumen en el siguiente cuadro:

Intervalo	Máximo	Media
1%	1051.40	1034.14
5%	1052.37	1035.37
10%	1052.73	1033.54
40%	1053.47	1033.25

**Tabla 34.** Rentabilidades media y máxima del modelo Media – Varianza - VaR - MAD

De la Tabla 34 se extrae que todos los intervalos han logrado una rentabilidad positiva pero que se encuentra por debajo de la lograda por el

índice de referencia (1090.08). Todos los intervalos se encuentran en un rango de rentabilidad máxima cercanos, aunque el mejor es el IC del 40%, obedeciendo a la lógica de obtener un mayor rendimiento a la hora de asumir un mayor riesgo. En cuanto a rentabilidad media destaca por encima de todos el IC del 5%, con poca diferencia sobre el resto de IC.

Los resultados obtenidos por el mercado en el período de evaluación son los siguientes:

Medida	'MARKET'
'RETURN'	0,0901
'STD'	0,1159
'SHARPE'	0,7638
'TREYNOR'	0,0885

**Tabla 35.** Resultados índice

Y los resultados de las carteras generadas para cada uno de los intervalos de confianza son:

IC 1%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5216	0,1879	0,3541	0,3677
'TREYNOR'	0,0760	0,0282	0,0549	0,0563
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0514	0,0194	0,0341	0,0345
'STD'	0,1057	<b>0,0863</b>	<b>0,0924</b>	0,0907

**Tabla 36.** Resultados Modelo Media - Varianza - VaR - MAD 1%

IC 5%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	<b>0,5429</b>	0,0851	<b>0,3681</b>	0,3743
'TREYNOR'	<b>0,0867</b>	0,0128	<b>0,0573</b>	0,0569
'JENSEN 'S ALPHA'	<b>-0,0005</b>	-0,0008	<b>-0,0007</b>	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	<b>-0,0005</b>	-0,0007	<b>-0,0007</b>	-0,0007
'RETURN'	0,0526	0,0111	<b>0,0354</b>	0,0353
'STD'	0,1124	0,0870	0,0929	0,0908

**Tabla 37.** Resultados Modelo Media - Varianza - VaR - MAD 5%

IC 10%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5021	0,1747	0,3446	0,3343
'TREYNOR'	0,0743	0,0262	0,0535	0,0514
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0527	0,0192	0,0335	0,0322
'STD'	0,1055	0,0875	0,0929	0,0911

**Tabla 38.** Resultados Modelo Media - Varianza - VaR - MAD 10%

IC 40%	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5307	0,1495	0,3419	0,3530
'TREYNOR'	0,0767	0,0227	0,0532	0,0546
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	<b>0,0535</b>	0,0156	0,0332	0,0337
'STD'	0,1060	0,0866	0,0930	0,0910

**Tabla 39.** Resultados Modelo Media - Varianza - VaR - MAD 40%

De estas tablas se puede apreciar que, al igual que con todos los modelos propuestos, no se logra mejorar el rendimiento del índice de referencia para ninguna de las medidas propuestas. Los cuatro intervalos de confianza logran resultados en cuanto a rentabilidad ajustada al riesgo.

El ratio de Sharpe revela que el modelo del IC del 5% es el que mejor rendimiento obtiene en cuanto a valores máximos, pero alejado de lo que llega a rendir el mercado, debido a la diferencia de rentabilidades. En cuanto al rendimiento medio el IC del 5% es de nuevo el que mejor resultado logra.

Con el ratio de Treynor se obtiene que el mejor modelo es del intervalo de confianza del 5%, por encima del resto de IC y, por primera vez, por encima del rendimiento que llega a obtener el mercado, aunque por poco (0.0867 frente a 0.0885). Esto puede deberse a que este ratio incorpora en el denominador la Beta, que mide mejor que la desviación estándar la relación entre el activo y el índice. En cuanto a valores medios, se vuelven a obtener valores menores que el mercado, destacando de nuevo el IC del 5%, pero siendo muy parecido al resto de intervalos.

Los Alfas de Jensen y las del modelo de tres factores de Fama & French consiguen, para todos los casos, un valor negativo, es decir, que se obtiene un rendimiento menor al que obtiene el índice, pero muy cercanos a cero, lo que se traduce en que es muy similar al del mercado. Ambas Alfas, para todos los modelos, resultados muy parecidos, tanto en valores máximos como valores medios, sin haber diferencias entre ellos.

Como el resto de modelos propuestos, vuelve a ocurrir que todas las carteras generadas logran una desviación estándar menor que la que obtiene el índice de referencia. El valor más bajo es el del IC del 1%, tanto en mínimo como en valor medio, pero similar a los demás IC.

Este modelo propuesto no ha logrado el objetivo de batir al mercado ni en rentabilidad ni en términos de rentabilidad ajustada al riesgo. Se exceptúa el caso del mejor valor obtenido por el ratio de Treynor en el modelo del IC del 5%, que supera al mercado por poco.

En cuanto al riesgo de las carteras generadas, se consigue el objetivo de que las carteras sean menos arriesgadas que el mercado. Esto no es suficiente como para que estas carteras logren batir al mercado por la diferencia de rentabilidad que hay entre las carteras y el índice.



## 10 Comparación y selección del mejor modelo

Después de haber analizado de forma individual todos los modelos propuestos, para cada una de sus posibles variantes, se va a proceder a evaluar el comportamiento general que han tenido las carteras generadas, los motivos de sus rendimientos y cuál ha sido el modelo que mejor se ha comportado a lo largo del período de evaluación.

Para la selección del mejor modelo se tiene en cuenta los valores medios obtenidos por ellos pues los valores máximos pueden haberse debido por casualidad y ser valores atípicos extremos, mientras que la media da una valoración más cercana a lo que el inversor o gestor puede esperar del rendimiento de los modelos propuestos.

Mejor Modelo	RETURN	SHARPE	TREYNOR	JENSEN	FAMA & FRENCH
Media - Varianza	0,04447	0,47893	0,07284	-0,0006797	-0,0006437
Media - Value at Risk 1%	0,03829	0,40844	0,06235	-0,0007039	-0,0006627
Media - MAD	0,02969	0,30289	0,04765	-0,0007293	-0,0006847
Media - Varianza - VaR 5%	0,03724	0,39686	0,06106	-0,0007114	-0,0006680
Media - Varianza - MAD	0,03074	0,31332	0,04866	-0,0007134	-0,0006690
Media - VaR - MAD 1%	0,03461	0,35507	0,05506	-0,0007048	-0,0006631
Media - Varianza - VaR - MAD 5%	0,03537	0,36808	0,05727	-0,0007042	-0,0006624

**Tabla 40.** Tabla resumen y mejor modelo

En primer lugar hay que destacar que el mejor modelo es el de Media – Varianza y que todas las medidas empleadas coinciden en ello. Además, ninguna de las carteras generadas ha logrado batir al mercado en términos medios, ni en rentabilidad ni en rentabilidad ajustada al riesgo. Tan sólo se ha dado un caso en el que uno de los modelos generados ha logrado superar al mercado en rendimiento con su mejor cartera (el modelo de Media – Varianza – VaR – MAD con IC del 5%), según el ratio de Treynor.

En cuanto a rentabilidad, el mejor modelo ha sido el modelo de optimización de carteras que propuso Markowitz, que usa como medida de

riesgo la Varianza. Este modelo ha obtenido una rentabilidad del 4.45%, que es en algunos casos hasta un uno por ciento superior a otros modelos propuestos, le sigue el modelo de Media - VaR con una rentabilidad del 3.83%.

En las gráficas obtenidas durante el período de evaluación, y analizadas anteriormente, muestran que todos los modelos tienen un comportamiento similar a lo largo del período, siendo más acentuados en algunos casos pero siempre por debajo de lo que realiza el índice de referencia. En los histogramas se observa que, para cada modelo, las carteras generadas se aglutinan en torno a un mismo rango de valores.

El ratio de Sharpe revela que el mejor modelo de los analizados vuelve a ser el de Markowitz (0.4789), que usa la varianza como medida de riesgo. Le siguen, aunque algo alejados, los modelos que usan el Value at Risk como función objetivo a minimizar, siendo el segundo mejor el modelo Media - VaR con IC del 1% (0.40844).

Todos estos valores se encuentran muy por debajo de lo que ha obtenido el índice (0.7638). A pesar de que los modelos generados han obtenido una desviación típica menor que la del mercado, esta no ha sido suficiente debido a la gran diferencia de rentabilidades que hay entre el Dow Jones (0.0901) y los modelos propuestos.

Con el ratio de Treynor se puede ver que el modelo de Media - Varianza es el que logra el mejor resultado de media (0.0728), muy por encima del segundo, el modelo Media - VaR con IC del 1% (0.06235). Este modelo sigue por debajo del resultado obtenido por el índice (0.0885), pero con un valor más cercano, a pesar de la diferencia de rentabilidades.

Esto es porque en el ratio de Treynor se usa la Beta del CAPM de las carteras respecto al mercado. Los valores obtenidos por las carteras con el coeficiente Beta es menor que uno y eso quiere decir que siguen la dirección del mercado pero no se ven tan influenciados por el movimiento que haga la rentabilidad del índice, lo que reduce el riesgo y compensa la

baja rentabilidad de las carteras en este tipo de medidas de rentabilidad ajustada al riesgo.

El alfa de Jensen indica que el mejor modelo es también el modelo de Markowitz (-0.0006797), con un valor muy cercano a cero. Esta medida ya incluye al mercado en el cálculo de alfa a partir de la regresión lineal usada para calcularla. El mejor modelo ha tenido un rendimiento peor por ser menor que cero, pero muy cercano, al del mercado.

Al igual que ocurre con el ratio de Treynor, esta medida incluye el cálculo de la Beta del CAPM. Las betas calculadas vuelven a ser menor que uno, lo que quiere decir que la volatilidad de la rentabilidad de las carteras generadas siguen la dirección de los movimientos de la rentabilidad del índice, pero en menor medida, lo que se traduce en que el retorno de las carteras tienen un riesgo inferior a la del mercado.

El alfa del modelo de tres factores de Fama & French, al igual que el resto de medidas, vuelve a mostrar que el mejor modelo es el de Media - Varianza, aunque en este caso tiene valores muy similares a los obtenidos por el resto de modelos. De nuevo vuelve a ocurrir que, de media, no se ha logrado obtener un resultado positivo, lo que se traduce en que no se ha logrado batir al mercado en términos de rentabilidad ajustada al riesgo, aunque los valores logrados se encuentran muy cercanos a cero.

Este modelo también se basa en el cálculo del coeficiente beta, aunque en este caso se incluyen dos coeficientes betas que tienen en cuenta más factores que pueden afectar a un activo, en lugar de usar sólo la beta del CAPM, y la rentabilidad del activo. Esto reduce el impacto que puedan tener en el resultado final estos dos valores y ello, unido a un bajo coeficiente beta del CAPM para cada activo, explica que se hayan obtenido valores muy cercanos a cero.

Modelo	Beta Treynor	Beta Jensen	Beta F&F
Media - Varianza	<b>0.5928</b>	0.5912	0.5924
Media - VaR 1%	<b>0.5928</b>	0.5915	0.5928
Media - MAD	0.6000	0.5986	0.6002
Media - Varianza - VaR 5%	0.5901	<b>0.5888</b>	<b>0.5902</b>
Media - Varianza - MAD	0.6092	0.6082	0.6097
Media - VaR - MAD 1%	0.6034	0.6027	0.6041
Media - Varianza - VaR - MAD 5%	0.5999	0.5992	0.6006

**Tabla 41.** Tabla resumen Betas de los mejores modelos

Las medidas empleadas para valorar el rendimiento de las carteras generadas han mostrado que son congruentes entre ellas, pues todas coinciden en cuál ha sido el mejor modelo, y siguientes, a pesar de que hayan usado diferentes valores y técnicas para calcularlas. Esto demuestra que las medidas ofrecen solidez y poca disparidad en cuanto a determinar qué cartera se ha comportado mejor.

Por otro lado hay que destacar que, a pesar de lo anterior, estas medidas sí que discrepan en cuanto a cómo han actuado las carteras generadas respecto al índice de referencia.

Por último, ha sorprendido que, a pesar del riesgo que se está dispuesto a asumir con una probabilidad de pérdidas del 40%, los modelos más arriesgados no han obtenido mejores resultados que en los que no se ha asumido demasiado riesgo, esto indica que no por asumir más riesgo se obtiene mejor rentabilidad.

## 11 Conclusiones y trabajo futuro

### 11.1 Conclusiones

Después de haber realizado este trabajo de investigación, se ha de destacar que se ha estudiado en profundidad el comportamiento de técnicas evolutivas a la hora de resolver el problema que plantea la Teoría Moderna de Carteras.

Si bien no se ha logrado obtener un modelo que bata al índice de referencia en performance, hay que resaltar que, gracias a estos resultados, se ha podido comprobar cómo el uso de diferentes medidas de riesgo afecta a los resultados finales y qué factores influyen en los resultados obtenidos.

La principal motivación de este proyecto es resolver uno de los grandes problemas que existen con la Teoría Moderna de Carteras: el pobre rendimiento que ofrecen modelos como el que propuso Markowitz, que, a pesar de ser teóricamente perfecto, no es puesto en práctica por los gestores de patrimonios e inversores debido a las limitaciones y problemas que presenta.

Para ello, en este trabajo, y teniendo en cuenta una de las grandes limitaciones del modelo de Media – Varianza, se propone como solución emplear diferentes formas de medir el riesgo a la hora de modelizar problemas de optimización de carteras y comprobar cómo se comportan, en un escenario real.

Se planteó este tipo de solución para el modelo de Markowitz porque actualmente existen medidas de riesgo más adecuadas cuando la distribución de los retornos no es normal y que enfocan de forma más realista las preferencias del inversor.

Para la solución de este tipo de problemas se opta por utilizar algoritmos evolutivos, en concreto el NSGA-II (un algoritmo genético específico para resolver problemas multiobjetivos). El motivo de usarlo es

poder aprovechar la potencia computacional que ofrecen y que permiten manejar fácilmente varias funciones objetivo a la vez. También hay que destacar que este tipo de técnicas son generalistas y que se pueden adaptar al problema que se está planteando.

Estos además aportan una serie de ventajas como que permiten una búsqueda partiendo desde una población de puntos, que reducen considerablemente la probabilidad de caer en óptimos locales respecto a las técnicas clásicas. No necesitan de información auxiliar para poder trabajar, simplemente usan la información que proporciona la función objetivo, lo que lleva a destacar la importancia de la definición de esta a la hora de usar este tipo de técnicas.

Este algoritmo, propio del campo de la computación evolutiva, hace frente a las limitaciones que tienen las técnicas clásicas de optimización en este tipo de problemas de búsqueda de óptimos globales, como la programación cuadrática.

Ninguno de los modelos propuestos ha logrado batir al mercado en media y el modelo que mejores resultados ha obtenido en este trabajo ha sido el modelo que propuso Markowitz, el modelo de Media – Varianza. A este modelo le sigue, aunque de lejos, el de Media – VaR. Por otro lado el modelo de Media – MAD es el que peores resultados ha obtenido en todos los apartados.

Se observa que los modelos que emplean intervalos de confianza del 40% no han logrado mejores resultados en rentabilidad que modelos que empleaban ICs menos arriesgados. Esto debido a que en un escenario real estos modelos pueden responder de forma muy diferente a lo que la teoría indica por el error de estimación que se da a la hora de predecir los parámetros del modelo.

La explicación que hay detrás de estos resultados es que, a pesar de su gran importancia, la medida de riesgo empleada no es el único factor determinante en la construcción de carteras.

Existen factores como que las preferencias de los inversores no son racionales (y en estos modelos se asume que sí). También hay problemas a solucionar como que se hace una predicción a futuro de la rentabilidad a partir del promedio de una serie pasada de rentabilidades. Otro factor es la estimación que se realiza de la matriz de varianzas-covarianzas, que no se parece a la que luego ocurre realmente, y, por tanto, no se miden bien todas las correlaciones e influencias que pueden ejercer unos activos sobre los otros.

Por último, junto a todos estos problemas, hay que indicar que se están hallando conjuntos de soluciones óptimos que son muy sensibles a pequeños cambios en los parámetros de entrada. Esto hace que se produzcan grandes diferencias entre los parámetros calculados en las carteras óptimas generadas y cómo se comportan realmente cuando se las somete a escenarios reales y haciendo que sean diferentes de los predichos, aunque difieran en lo más mínimo.

Esto lleva a la conclusión de que existe un problema de robusted en las soluciones óptimas alcanzadas, es decir, existe un error de estimación que se maximiza cuando se emplean estos modelos bajo las técnicas, supuestos y restricciones descritos. Entonces ocurre que la diferencia entre los parámetros estimados y los reales puede llegar a ser muy amplia, dando lugar a que las carteras generadas no se comporten como se esperaba.

A pesar de esta conclusión, hay que resaltar que se ha logrado otro de los objetivos que este trabajo persigue, obtener carteras que sean menos arriesgadas que lo que es el mercado, y como se ha podido comprobar con los resultados, se ha conseguido.

Se han obtenido valores mucho menores que los del índice en cuanto a desviación estándar. Además los coeficientes betas calculados son menores que uno, lo que muestra que el activo se mueve en la misma dirección del índice de referencia,, pero no amplifica sus movimientos, ni en sentido negativo ni positivo.

Esto es debido a que, gracias al uso del algoritmo NSGA-II, se alcanza lo que en teoría se considera el frente de Pareto óptimo. Esto ha dado lugar a carteras que están mejor diversificadas que lo que llega a estar el índice, es decir, carteras en las que se elimina más riesgo específico del que reduce el Dow Jones Industrial Average.

Por último, otro de los objetivos logrados es que se han generado carteras que, para el período utilizado, no se limitan a seguir la tendencia del mercado y amplificarla, ni de forma positiva ni negativa. Se observa que los modelos generados tienen un comportamiento bastante independiente al del índice. Hay puntos en los que el índice evoluciona de forma positiva mientras que las carteras tienen una tendencia negativa. Este hecho es importante pues gran parte de los gestores de carteras únicamente se dedican a seguir al índice, sin hacer algo diferente y, por tanto, sin practicar realmente una gestión activa.

## **11.2 Trabajo futuro**

A lo largo de este proyecto se busca un modelo que pueda obtener resultados que hagan que se pueda confiar en este tipo de técnicas a la hora de trabajar en este campo de las finanzas, la gestión de activos. Gracias a este trabajo se han encontrado diversos problemas que se proponen como futuras líneas de investigación.

Como se ha descrito en el apartado de conclusiones, se ha determinado que existe un problema de robusted de las soluciones halladas. Esto es debido a que se estiman unos parámetros que son muy sensibles ante variaciones en las predicciones hechas, lo que lleva a que las carteras generadas no se comporten como se espera.

Para este problema se propone someter cada modelo generado a diferentes escenarios en los que tratar la robusted de los resultados como un objetivo más a partir de técnicas de remuestreo [24].



La Teoría Moderna de Carteras implica la predicción a futuro de unos parámetros como son la rentabilidad y el riesgo a partir de lo que ocurrió en el pasado, algo que ha provocado que el comportamiento de las soluciones estimadas sea muy diferente del comportamiento que tienen en un escenario real. Para esto se propone como solución mejorar los métodos empleados para estimar estos parámetros.

La rentabilidad se está estimando a partir de algo tan simple como la media de una serie temporal de rentabilidades del activo en cuestión. Este método es muy simple, pues la media aritmética no deja de ser un estimador que no tiene en cuenta los comportamientos extremos y que se pueden dar en este campo.

Para evitar usar la media, se podrían usar técnicas de análisis de series temporales propias del campo de la inteligencia artificial, como por ejemplo las redes de neuronas (que no hacen suposiciones sobre la distribución de los datos), y poder lograr que el modelo tenga un mejor rendimiento y más cercano a lo estimado.

Uno de los grandes problemas a la hora de estimar parámetros en la Teoría Moderna de Carteras es que no se mide de forma adecuada la relación que existe entre el comportamiento de un activo y cómo afecta ese comportamiento a los demás, es decir, la estimación que se hace de la matriz de covarianzas difiere mucho de la real.

La matriz estimada es muy sensible a los valores extremos. Se propone mejorar la predicción de este parámetro utilizando técnicas más adecuadas y que proporcionen un valor más cercano al que realmente se da.

Otro de los problemas detectados en este trabajo es que se están generando carteras de inversión que siguen una estrategia de *Buy and Holding* de un año y, por tanto, se realizan estimaciones de la rentabilidad y el riesgo muy a largo plazo, cuando los factores que pueden afectar a un activo en estos dos términos varían mucho en períodos tan largos.

Se propone como solución utilizar un período de evaluación en el que no se siga la estrategia propuesta y se siga una estrategia más activa. Se pueden usar las técnicas evolutivas, como el algoritmo empleado en este trabajo (NSGA-II), para rebalancear las carteras cada cierto tiempo, por ejemplo cada semana, donde la estimación de los parámetros puede no ser tan incierta y, por tanto, lograr mejores resultados en términos de rentabilidad y rentabilidad ajustada al riesgo.

A parte de lo anterior, también se ofrece emplear diferentes intervalos de evaluación, como momentos de bonanza o de crisis, para comprobar cómo se comportan las carteras generadas, es decir, determinar si son carteras que se limitan a seguir la tendencia del mercado o que tienen un comportamiento más independiente, parte de esto se observa en este trabajo pero en un sólo período de evaluación.

Por último, se sugiere continuar con la labor de este proyecto, usar medidas de riesgo diferentes a las propuestas. Mandelbrot [53], uno de los pioneros en el estudio del comportamiento del precio de las acciones, observó que las distribuciones del precio de las acciones se ajustan mejor a distribuciones de la ley potencial que a una distribución normal.

Esto implica que, algunas medidas, como la desviación estándar, dejan de ser una buena medida de riesgo, pues, según la distribución normal, obtener una rentabilidad del 55% ocurre una vez cada 740 años, pero realmente ocurre que la rentabilidad de las acciones exceden estos valores mucho más frecuentemente [53].

Los sucesos extremos, que están en las colas de una distribución, ocurren más frecuentemente de lo que se presupone (*fat tails*). Se pueden emplear diferentes medidas de riesgo que midan mejor este tipo de distribuciones, combinado con lo anteriormente propuesto.

## 12 Planificación

En este capítulo se detalla el tiempo empleado para el desarrollo del trabajo. En primer lugar muestra la planificación inicial planteada antes del comienzo del proyecto para luego describir la planificación y plazos que se han seguido en realidad.

### 12.1 Planificación inicial

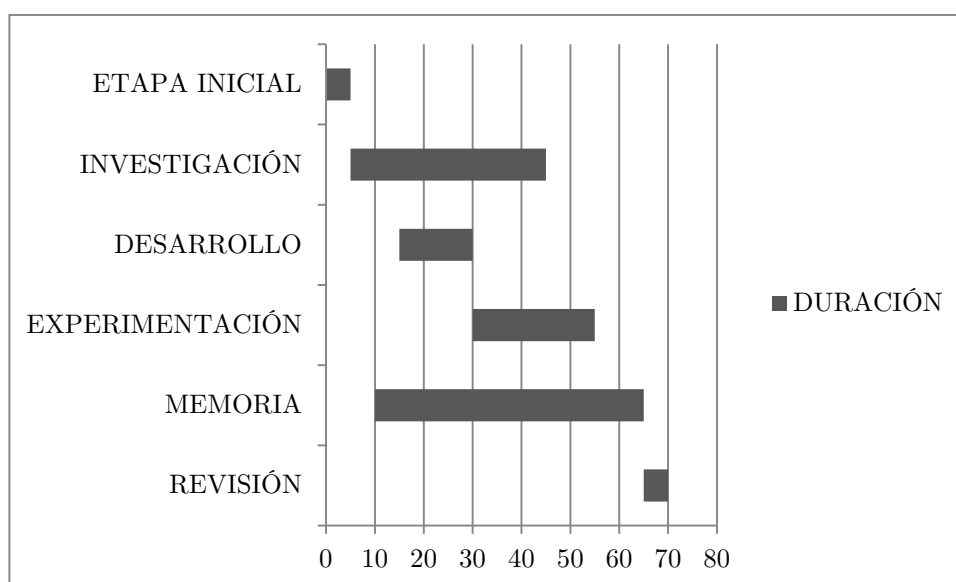
La planificación inicial consta de seis etapas, más un tiempo de holgura de 15 días, que fueron definidas de tal manera que pudiesen englobar, de forma general, las partes más importantes del proyecto. Estas seis etapas son:

- **Etapla inicial:** esta etapa involucra el comienzo del proyecto y trata de establecer qué tipo de trabajo se va abordar, qué posibles herramientas se utilizarán y cómo se planteará el problema. Duración: 5 días.
- **Etapla de investigación y documentación:** después de familiarizarse con el proyecto y haberlo planteado se procede a investigar y a obtener documentación sobre los diferentes elementos que componen el trabajo. Se solapa con varias etapas, por las situaciones y cuestiones que puedan surgir. Duración: 40 días.
- **Etapla de desarrollo:** una vez comenzada la investigación y establecidas las bases sobre las que se asienta el trabajo, se pasa a adaptar el algoritmo seleccionado a los problemas y modelos planteados. Duración: 15 días.
- **Etapla de experimentación:** se llevan a cabo las pruebas sobre los modelos planteados y bajo ciertas situaciones. Duración: 25 días.
- **Etapla de redacción de la memoria:** en esta etapa se redacta el documento en el que se refleja cada una de las etapas de este proyecto. En él se muestran los resultados y

conclusiones extraídas. Esta etapa está en constante revisión ya que se redacta durante la mayor parte del proyecto para así documentar todos los datos. Duración: 55 días.

- **Etapa de revisión:** etapa final en la que se revisa el proyecto realizado y se le da el formato adecuado. Duración: 5 días.

Se establece un presupuesto de 8 horas por día de trabajo dedicado al proyecto. Esto da como resultado que se dedican 70 días que, traducido a horas presupuestadas, da lugar a un total de 560 horas. El siguiente gráfico muestra un diagrama de Gantt con la planificación presupuestada.



**Figura 32.** Planificación presupuestada

## 12.2 Planificación real

Después de haber realizado el proyecto y de haber establecido la planificación inicial como un punto de referencia en cuanto a hitos y tiempos dedicados, se ha comprobado que ha sido necesario utilizar de todo el tiempo de holgura que se presupuestó.

En primer lugar, la primera etapa ha sido aprovechada en su totalidad y se ha empleado todo el tiempo presupuestado, lo que ha dado como resultado un tiempo real de 5 días.

La fase de investigación y documentación se solapaba con otras etapas que se presupuestaron. El tiempo real empleado fue superior al planificado porque a la hora de adaptar el algoritmo y realizar las pruebas se dieron y surgieron cuestiones que necesitaron una respuesta. El tiempo real empleado tuvo lugar durante casi todo el proyecto y han sido necesarios 70 días.

La fase de desarrollo también fue superior a la presupuestada y comenzó con posterioridad a la fecha planeada. Esto es debido a que ha sido necesario emplear más horas para la investigación y así poder comenzar a adaptar el algoritmo empleado. Esta etapa finalmente se ha alargado y solapado con la etapa de experimentación porque ha sido necesario realizar ajustes una vez que se empezó a realizar las primeras pruebas. La duración real ha sido de 25 días.

La fase de experimentación también comenzó con retraso por los problemas ocurridos en otras etapas. Esta etapa se ha alargado debido a que fue necesario repetir las pruebas porque la etapa de investigación provocó que saliesen a la luz cuestiones que dieron lugar a volver a repetirlas. La duración real ha sido de 37 días.

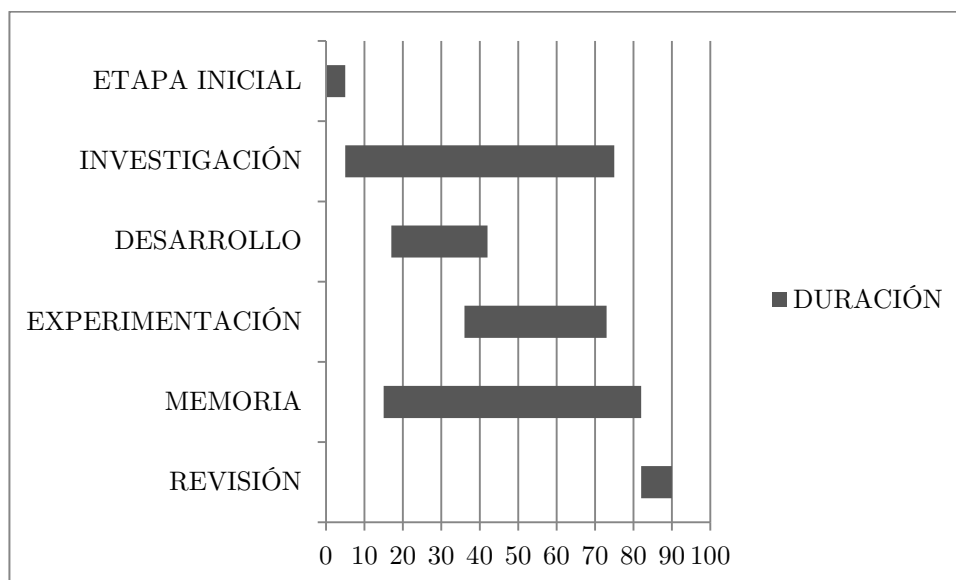
La fase de redacción de la memoria comenzó en una fase temprana del proyecto, para documentar y establecer las bases teóricas sobre las que se realizaría el proyecto. Ha estado presente durante casi todo el proyecto y ha tenido una duración real de 67 días.

La fase final, la de revisión del proyecto, ha tenido lugar una vez redactada la memoria y en ella se han corregido los detalles. Debido a ciertas rectificaciones y revisiones ha sido necesario emplear 8 días.

Se planificaron 70 días con un margen de 15 días, lo que daba un total de 85 días. En cuanto a las horas dedicadas, se presupuestó trabajar 8 horas al día, lo que ha dado un total de 560 horas. Para completar este proyecto ha sido necesario emplear un total de 90 días, 5 días más de lo

planificado, incluyendo el tiempo de margen establecido, lo que da lugar a un total de 720 horas reales.

En el siguiente diagrama de Gantt se muestran las diferentes etapas y los tiempos reales que han sido necesarios para el desarrollo del proyecto.



**Figura 33.** Planificación real

## 13 Presupuesto

En este apartado se muestra el presupuesto, detallando los costes, que se ha estimado para el proyecto desarrollado. Para su elaboración se ha hecho uso de la experiencia adquirida en el trabajo en proyectos de consultoría y de los estudios previos realizados en esos trabajos.

PERSONAL				
Nombre	Puesto	Tarifa por hora	Horas	Coste total
Alejandro Antón Aguilar	Investigador	35 €	560	19.600 €
<b>TOTAL</b>				<b>19.600 €</b>
EQUIPAMIENTO				
Descripción	Duración	Amortización	Coste	Coste imputable
Ordenador portátil Sony Vaio serie E	4,25 meses	48 meses	650 €	57,55 €
Ordenador portátil Asus	4,25 meses	48 meses	800 €	70,83 €
<b>TOTAL</b>				<b>128,39 €</b>
SOFTWARE				
Descripción	Duración	Amortización	Coste	Coste imputable
Licencia Matlab 2014a	4,25 meses	36 meses	2.000 €	236,11 €
Licencia Microsoft Office 2007 Professional	4,25 meses	36 meses	1.222 €	144,32 €
Licencia Windows 7 Enterprise	4,25 meses	36 meses	340 €	40,13
<b>TOTAL</b>				<b>420,56 €</b>

**Tabla 42.** Presupuesto detallado

RESUMEN	
Concepto	Coste
Personal	19.600 €
Equipo	128,39 €
Software	420,56 €
<b>Total sin IVA</b>	<b>20.148, 95 €</b>
IVA (21%)	4.231,28 €
<b>TOTAL</b>	<b>24.380,23 €</b>

**Tabla 43.** Presupuesto resumido

## 14 Referencias

- [1] John Henry Holland. (1992). Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence.
- [2] Arias-Monta, A., Coello, C. A. C., & Mezura-Montes, E. (2012). Multiobjective evolutionary algorithms in aeronautical and aerospace engineering. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 16(5), 662-694.
- [3] Wu, C. H., Tzeng, G. H., Goo, Y. J., & Fang, W. C. (2007). A real-valued genetic algorithm to optimize the parameters of support vector machine for predicting bankruptcy. *Expert systems with applications*, 32(2), 397-408.
- [4] <http://mathworld.wolfram.com/GlobalOptimization.html>
- [5] Bäck, T., Hammel, U., & Schwefel, H. P. (1997). Evolutionary computation: Comments on the history and current state. *Evolutionary computation, IEEE Transactions on*, 1(1), 3-17.
- [6] [http://www.dia.fi.upm.es/~ajimenez/Docu\\_Metaheuristicas/Transparencias/Tema5Evolutivos.pdf](http://www.dia.fi.upm.es/~ajimenez/Docu_Metaheuristicas/Transparencias/Tema5Evolutivos.pdf)
- [7] Isasi, P. (17/07/2010). Ejemplo de algoritmo genético. Obtenido el 29/03/2015, desde el sitio Web de OCW - UC3M: <http://ocw.uc3m.es/ingenieria-informatica/computacion-biologica/material-de-clase-1/ejemploAGT.pdf>.
- [8] Eiben, A. E., & Smith, J. E. (2003). Introduction to evolutionary computing.
- [9] Koza, J. R. (1992). Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection.



- [11] Eigen, M. (1973). Ingo Rechenberg Evolutionsstrategie Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution.
- [10] Back, T., Fogel, D. B., & Michalewicz, Z. (1997). *Handbook of evolutionary computation*. IOP Publishing Ltd..
- [12] Coello, C. A. C., Van Veldhuizen, D. A., & Lamont, G. B. (2002). Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems.
- [13] Coello, C. A. C. (2003). Evolutionary multiobjective optimization: current and future challenges. *Advances in soft computing*, 243-256.
- [14] Abraham, A., & Jain, L. (2005). Evolutionary multiobjective optimization. *Evolutionary Multiobjective Optimization*, 1-6.
- [15] Golberg, D. E. (1989). Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. *Addion wesley, 1989*.
- [16] Schaffer, J. D. (1985, January). Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. In *Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms, Pittsburgh, PA, USA, July 1985* (pp. 93-100).
- [17] Horn, J., Nafpliotis, N., & Goldberg, D. E. (1994, June). A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization. In *Evolutionary Computation, 1994. IEEE World Congress on Computational Intelligence., Proceedings of the First IEEE Conference on* (pp. 82-87). Ieee.
- [18] Fonseca, C. M., & Fleming, P. J. (1993, June). Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation Discussion and Generalization. In *ICGA* (Vol. 93, pp. 416-423).
- [19] Zitzler, E., & Thiele, L. (1999). Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach. *evolutionary computation, IEEE transactions on*, 3(4), 257-271.

- [20] Laumanns, M. (2001). SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm.
- [21] Erickson, M., Mayer, A., & Horn, J. (2001, January). The niched pareto genetic algorithm 2 applied to the design of groundwater remediation systems. In *Evolutionary Multi-Criterion Optimization* (pp. 681-695). Springer Berlin Heidelberg.
- [22] Coello, C. A. C. C., & Pulido, G. T. (2001, January). A micro-genetic algorithm for multiobjective optimization. In *Evolutionary multi-criterion optimization* (pp. 126-140). Springer Berlin Heidelberg.
- [23] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10429-nsga-ii-a-multi-objective-optimization-algorithm>
- [24] García-Rodríguez, S. (2012). Application of multiobjective evolutionary techniques for robust portfolio optimization.
- [25] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection\*. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- [26] Markowitz, H. (1959). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.
- [27] [http://portal.uc3m.es/portal/page/portal/indem/cursos/curso\\_aplicado\\_de\\_gestion\\_de\\_carteras](http://portal.uc3m.es/portal/page/portal/indem/cursos/curso_aplicado_de_gestion_de_carteras)
- [28] Michaud, R. O., & Michaud, R. O. (2008). *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation Includes CD*. Oxford University Press.
- [29] Kaura, V. (2005). Portfolio optimisation using value at risk.
- [30] <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/VAR.pdf>
- [31] <http://people.stern.nyu.edu/igiddy/valueatrisk.htm>

- [32] Layrón, G. G. D., Marhuenda, P. G., & Dato, J. F. O. (2004). Alternativas estadísticas al cálculo del Valor en Riesgo. *Estadística española*, 46(155), 119-148.
- [33] Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management science*, 37(5), 519-531.
- [34] Modigliani, F., & Modigliani, L. (1997). Risk-adjusted performance. *The Journal of Portfolio Management*, 23(2), 45-54.
- [35] Shahid, M. (2007). Measuring portfolio performance. *Available at <http://www2.math.uu.se/research/pub/Shahid1.pdf> [Accessed Oct 3 rd 2014]*, 11-14.
- [36] Aragon, G. O., & Ferson, W. E. (2006). Portfolio performance evaluation. *Foundations and Trends in Finance*, 2(2), 83-190.
- [37] Sharpe, W. F. (1994). The sharpe ratio. *The journal of portfolio management*, 21(1), 49-58.
- [38] Treynor, J. L., & Black, F. (1973). How to use security analysis to improve portfolio selection. *Journal of Business*, 66-86.
- [39] Jensen, M. C. (1968). The performance of mutual funds in the period 1945–1964. *The Journal of finance*, 23(2), 389-416.
- [40] Fama, E. F., & French, K. R. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*, 33(1), 3-56.
- [41] <http://www.jesusdavidmoreno.com/resources/Using+Matlab+in+Mutual+Funds+Evaluation.pdf>
- [42] [http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data\\_library.html](http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html)

- [43] [http://portal.uc3m.es/portal/page/portal/indem/cursos/curso\\_aplicado\\_de\\_gestion\\_de\\_carteras](http://portal.uc3m.es/portal/page/portal/indem/cursos/curso_aplicado_de_gestion_de_carteras)
- [44] <http://finance.yahoo.com/>
- [45] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18458-historical-stock-data-downloader>
- [46] <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm>
- [47] Darwin, C. (2009). *The origin of species by means of natural selection: or, the preservation of favored races in the struggle for life*. W. F. Bynum (Ed.). AL Burt.
- [48] Mendel, G. (1866). Versuche über Pflanzenhybriden. *Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brunn* 4: 3, 44.
- [49] Weismann, A. (1893). *The germ-plasm: a theory of heredity*. C. Scribner's sons.
- [50] Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. A. M. T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 6(2), 182-197.
- [51] Srinivas, N., & Deb, K. (1994). Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary computation*, 2(3), 221-248.
- [52] Goldberg, D. E., & Holland, J. H. (1988). Genetic algorithms and machine learning. *Machine learning*, 3(2), 95-99.
- [53] Mandelbrot, B. B., & Hudson, R. L. (2008). *Misbehaviour of Markets*. Profile Books.

- [54] Statman, M. (1987). How many stocks make a diversified portfolio?. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(03), 353-363.
- [55] <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/VAR.pdf>
- [56] <http://www.math.nus.edu.sg/~urops/Projects/valueatrisk.pdf>

## Anexo 1

### Abstract

Due to the growing interest and importance that are having financial instruments and risk measures in recent years, especially since the beginning of the 2008 crisis, it is necessary to develop and use new models and techniques to address such problems.

The rise of investment funds makes that this work talks about the asset management and how the Modern Portfolio Theory faces and solves this issue.

It will be questioned one of the main limitations of this theory, risk measures used by classical models, and new models using different measures of risk, more realistically, that reflect the preferences of investors and managers, will be proposed.

To do this, as it is a problem with more than one objective, it will be solved with tools that have been developed specifically for them, the multi-objective evolutionary algorithms, MOEAs. These techniques offer substantial advantages to resolve such problems, as opposed to traditional optimization techniques.

The objective of this work is to use MOEA to address the problem of optimizing investment portfolios. It is intended that the proposed models use different risk measures to the original and solve the limitations of the classical model. It seeks to demonstrate, with their results in terms of performance, that MOEAs are a tool to be considered by investors and managers.

**Keywords:** genetic algorithm, MOEA, NSGA-II, portfolio optimization, Value at Risk, Mean Absolute Deviation, measures of risk-adjusted returns.

## Introduction

Modern Portfolio Theory is an issue that has generated many investigations in the past fifty years, particularly since Henry Markowitz revolutionized the financial landscape with its model of Media - Variance.

Interest in Modern Portfolio Theory is given because it seeks to choose the right combination of assets that generates maximum returns, assuming the minimum possible risk. Search this combination that makes the investor obtain the maximum profit has led to use and to develop numerous techniques that solve this problem.

In the context in which financial instruments have become a common tool and currently more and more users have access, it has made that more asset managers arise. Many of them do not add value to the management fund or portfolio managed because they simply engaged to follow the behavior of the index that the fund references.

It is proposed to review one of the classical issues, portfolio management theory, and propose new models that can be used in practice. One of the main problems of the Modern Portfolio Theory is that is not used in practice by managers and investors due to the limitations that it have. One of the most important limitations is the risk measure used, the Variance.

There are other more appropriate measures than the Variance. This is due to the nature and distribution following data. The measures of asymmetric risk are more suitable when the distribution of returns are not normal, in the real world is the most common, and therefore, in general, professionals and investors are more interested in risk measures such as the Semideviation, Value at Risk and Mean Absolute Deviation.

Due to the nature of the problem, an optimization problem that involves two opposing objectives, it has been a subject for intensive discussions under the branch of mathematics and a lot of variations have

emerged and that have led that techniques of the field Artificial Intelligence are used, the Evolutionary Computation.

This is a field that has grown considerably in the last twenty years and has also attracted attention, largely due to the improved technical level of computers and equipment. This has allowed today that there is enough power to solve complex problems that some years ago seemed unfeasible.

## **Goals**

The objective pursued in this TFG is to demonstrate how multi-objective optimization techniques, based on evolutionary algorithms, can help to improve the solutions obtained by traditional techniques and can help to achieve the following objectives:

The main objective of this paper is to address the limitations that have the model proposed by Markowitz regarding risk measurement that it uses, and therefore, although it is theoretically perfect model, it is not use in practice by the managers and investors as a tool by the assumptions that are assumed.

It will be studied how the use of optimization models with other measures, such as Value at Risk and Mean Absolute Deviation, affect the performance and evaluation of an investment portfolio and if part of the limitations of the original model will be resolved. In addition, it will be checked that they get results that behave independently of the index, which does not perform the majority of investment fund managers.

## **Evolutionary Computation**

Evolutionary computation is a branch of Artificial Intelligence inspired by biology, particularly by the neo-Darwinian theory of evolution. It is based on the survival of the fittest individuals from each generation and on the studies of Weismann [49], Mendel [48] and, of course, Darwin [47].



Genetic algorithms are search algorithms based on the way of functioning of natural selection and genetics. They were developed by John Holland, his colleagues and his students of the University of Michigan [1]. The aims were to explain the adaptive process of natural systems and to design an artificial system to gather together the most important mechanisms of natural systems.

They efficiently exploit historical information to reach new search points, so each time that a new item is reached, it is expected to be better than the last. In each generation the algorithm seeks to create a new set of individuals from the best individuals of the previous generation.

But in the real world, in general, there are problems which involve more than one target, usually in conflict, to maximize, to minimize or a combination of both. It is for this reason that Multiobjective Optimization arises.

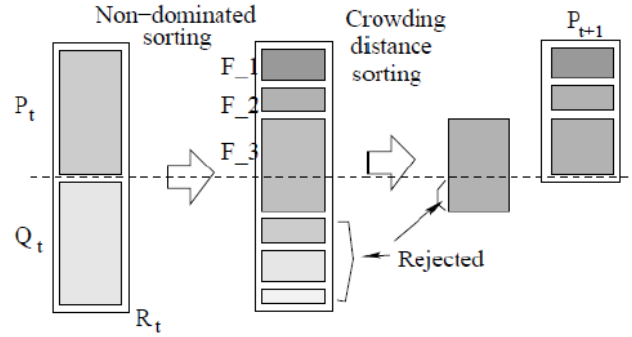
The Multiobjective Optimization can be defined as a vector of decision variables, which satisfies a number of restrictions, and tries to optimize a vector of objective functions, usually in conflict. Is for that that to optimize means to search a solution that provides an acceptable value to each of the objective functions from the vector [12].

Evolutionary algorithms have proven to be useful in resolving these types of issues because they work simultaneously with a set of possible solutions, the population, which means that it can find multiple points of the Pareto optimal set in a single execution of the algorithm. They need very little information about the problem to solve and they are less susceptible to the form and continuity of the Pareto front.

Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II) is proposed by Deb et al algorithm. (2002) [50] and is the evolution of the existing algorithm, NSGA, which was proposed by Srinivas and Deb (1994) [51]. Although these two algorithms share the same name they bear little similarity.

NSGA-II emerged as an improvement to the limitations by which the original algorithm was criticized despite their effectiveness. The drawbacks found to the NSGA are its computational complexity, its lack of elitism and to choose at the start the optimum value for the parameter sharing.

NSGA-II improves computational efficiency, as well as it incorporates elitism and an operator to compare congestion, the crowding distance, which keeps the diversity. It also avoids having to specify a value for the additional parameters.



**Figure 1.** NSGA2 ordering scheme [50]

## Modern portfolio theory

Modern portfolio theory has its origins in the studies of Harry Markowitz, published in 1952 [25] about the process of choosing which assets form part of a portfolio. He proposed that the analysis starts with the individual analysis of the assets and ends with conclusions involving the portfolio as a single unit rather than as a set of values. The objective of the analysis proposed is to find those portfolios that best suit the goals of the investor.

The portfolio optimization believes that an investor wants to maximize the profitability of its portfolio on the one hand while, on the other hand, wants to minimize the risk (Variance) of portfolio returns in question, a problem being faced two objectives. The first portfolio optimization problem proposed was Media - Variance.

This Mean-Variance model operates under some assumptions are as follows [24] [27]:

- There are no transaction costs associated
- All investors have the same information.
- You have to invest all, that is, the investment must be total.
- Assets are liquid.
- The decisions of to buy or sell don't affect the market.
- Investors are not influenced by other variables than by the expected return and risk of the portfolio.
- Investors are rational and risk averse.
- The model is established for a period of time.

And in this project we have added the following restrictions:

- Cardinality of the portfolio.
- Maximum and minimum limits to invest in each asset.

### **Alternative risk measures**

The classical method of portfolio optimization is discussed above, the Mean-Variance model Markowitz. This model is well known because only the first two moments of the distribution of profitability are considered, the mean and variance. In this model, investors want to maximize expected returns, average, and minimize the variance of the expected return.

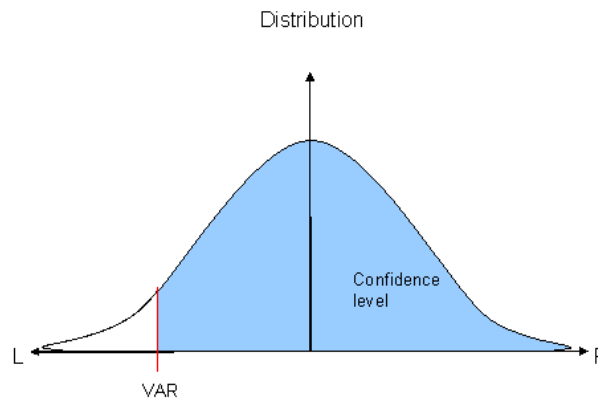
Although the mean-variance model is entirely correct in theory there are some problems associated with the model that make little used in practice. These problems are [27]:

1. The utility function of the investor.
2. Instability and ambiguity of optimal solutions.
3. Take as many reference periods.
4. There are more appropriate measures of risk.

One of the most important problems presented is that there are other more suitable measures risk due to the nature and distribution following data. Asymmetric risk measures are more appropriate when the distributions of returns are not normal, that in the real world is the most common. The alternative measures proposed are the Value at Risk and the MAD.

### ***Value at Risk***

The Value at Risk (VaR) is a measure used to assess the risk of a given portfolio. In its most general form measures the potential loss in value of an asset or portfolio at risk in a given period of time for a given confidence level.



**Figure 2.** VaR Distribution

### ***Mean Absolute Deviance (MAD)***

The model of Markowitz portfolio optimization involves a large computational complexity when it is wanted to construct portfolios from a large number of assets. This is due to the complexity associated with solving a quadratic programming problem with a very dense covariance matrix.

Therefore, many authors have proposed alternative risk measures that would reduce this complexity and could transform the quadratic

programming problem in linear programming problem, one of those measure is the Mean Absolute Deviance (MAD).

The risk measure of Mean Absolute Deviation was proposed by Konno (1991) [33] as an alternative to the model of Mean-Variance. It was developed to replace the variance as a measure of risk and seeks to reduce the computational complexity of the original problem to one of linear complexity, but maintaining similar performance to the original.

## Methods to evaluate the results

For the evaluation of portfolios generated from the algorithm NSGA-II it will be used measures from financial world, these performance measures calculate the area that has had a particular fund or portfolio relative to a benchmark, the market index. The comparison is made against the index to determine how well a portfolio manager does.

It could be used only the return of a portfolio as a measure of performance of a portfolio, but this does not take into account the risk that has been taken in order to obtain this profitability, we must also keep in mind that investors are generally risk averse and, therefore, they are much more sensitive to this than to the return they can get.

Therefore, it will be used ratios that include both variables into a single measure, measures of risk-adjusted profitability [34], particularly those based on the CAPM [35] [36]. These measures generally follow the following structure:

$$\text{Measure} = \text{risk} / \text{return}$$

These measures are based on CAPM and some of them are based on the proposed equation (1) that calculates the discount rate of expected return on assets, portfolios or funds.

$$E[r_p] = r_p + (E[r_m] - r_f)\beta_p \quad (1)$$

The measures proposed for the evaluation of the results are:

- Sharpe Ratio [37]
- Treynor Ratio[38]
- Jensen Alpha[39]
- Alpha model of three factors of Fama & French [40]

## **Description of the parameters and the data**

Each of the models will have a particular configuration of input parameters to the algorithm and they will be specified when the results of each of the models presented, these are:

- Population
- Generations
- Confidence level (measured VaR)
- Minimum and maximum cardinality restrictions
- Restrictions upper and lower limits for each asset investment

It has chosen the Dow Jones Industrial Average index and the assets that forming it to generate with the NSGA-II the different models. Through Yahoo! Finance [44] and a code of Matlab [45] adapted to this case, it were obtained daily returns of each of the companies forming the index.

The period to be taken daily returns ranging from the June 1, 1990 until June 1, 2014, with this it will be done the mean of the return of each business without the extremes of the crisis that has been affecting significantly.

For the evaluation of portfolios it has been used daily returns of the companies that make up the index, the index and the risk-free asset associated with this index. The evaluation period is from June 2, 2014 to June 1, 2015 and, during this interval, measures of performance described in previous chapter will be applied.

It was considered that the risk-free asset for this market is the US Treasury bond at 1 year of the secondary market, whose daily performance is expressed in annual terms. Data have been obtained from the website of the US Federal Reserve [46]. The period used for the Treasury bond is the evaluation period referred to above.

Finally, to allow the evaluation of portfolios with the three-factor model of FF, it has been necessary to use the daily data of the evaluation period for each of the three factors, the Market Risk Premium, the SMB and HML. The daily values of each of these three factors have been obtained from the personal page Kenneth R. French [42]. These data are valid for US market indexes.

## Comparison and selection of the best model

After having analyzed individually all the proposed models for each of the possible variants, it will proceed to evaluate the overall behavior of the generated portfolios, the reasons for their performance and what has been the model that best it has performed throughout the evaluation period.

To select the best model it is going to consider the average values obtained. The maximum values may have been due to chance and be extreme outliers, while the average can give a closer assessment to the the performance of the proposed models.

Best Model	RETURN	SHARPE	TREYNOR	JENSEN	FAMA & FRENCH
Mean - Variance	0,04447	0,47893	0,07284	-0,0006797	-0,0006437
Mean - Value at Risk 1%	0,03829	0,40844	0,06235	-0,0007039	-0,0006627
Mean - MAD	0,02969	0,30289	0,04765	-0,0007293	-0,0006847
Mean - Variance - VaR 5%	0,03724	0,39686	0,06106	-0,0007114	-0,0006680
Mean - Variance - MAD	0,03074	0,31332	0,04866	-0,0007134	-0,0006690
Mean - VaR - MAD 1%	0,03461	0,35507	0,05506	-0,0007048	-0,0006631
Mean - Variance - VaR - MAD 5%	0,03537	0,36808	0,05727	-0,0007042	-0,0006624

**Table 44.** Summary table and best model

First of all, it is noteworthy that the best model is the Media - Variance and all the measures used match. Moreover, none of the generated portfolios has managed to beat the market neither average terms, neither profitability neither risk-adjusted returns. It just has a case in which one of the generated models has managed to beat the market with the best portfolio performance, according to the Treynor ratio.

In terms of profitability, the best model is the Markowitz model, which uses the variance as a measure of risk. This model has achieved a return of 4.45%, which is in some cases up to one percent higher than other proposed models.

In the graphs obtained during the evaluation period, and discussed above, show that all models have a similar behavior over the period, being more pronounced in some cases but always below what makes the benchmark. In the histograms it is that for each model portfolios generated coalesce around the same range of values.

The Sharpe ratio shows that the best model is the Mean - Variance (0.4789). Followed, but something away by the models that use the Value at Risk as objective function to be minimized, the second best model is the Media - VaR with IC 1% (0.40844).

All these values are well below what has obtained the index (0.7638) and is because, even though the generated models have obtained a standard deviation lower than the index, this was not enough for the big difference of returns obtained within the Dow Jones (0.0901) and the proposed models.

With the Treynor ratio it can be seen that the model of Mean - Variance is the one that achieves the best result on average (0.0728), well above the second, the Mean - VaR model with IC 1% (0.06235). This model remains below the result for the index (0.0885).



This is because in the Treynor ratio is used the beta of CAPM relative to the market. The values obtained for the portfolios with the Beta coefficient is less than one and that means they follow the direction of the market, but are not so influenced by the movement that made the return of the index, which reduces risk and low profitability offsets portfolios in these measures of risk-adjusted return.

Jensen's alpha indicates that the best model is again the model of Markowitz (-0.0006797), with a value very close to zero. This measure includes the market in the calculation of alpha with the linear regression used, so the best model has worse performance for being less than zero, but close to the market.

As is in the case with Treynor ratio, this measure includes the calculation of the CAPM Beta portfolio with respect to index. The calculated betas are again less than one, indicating that the volatility of returns on portfolios generated follow the direction of the performance of the index movements but to a lesser extent, which means that the profitability of the portfolios have a lower risk to the market return.

The alpha from the three-factor model of Fama & French, like the other measures, shows that the best model is the model of Markowitz, although in this case is very similar to those values obtained by other models. On average has not been able to obtain a positive result, which means that has not been able to beat the market in terms of risk-adjusted returns, although the values achieved are very close to zero.

This model is also based on the calculation of the beta coefficient, although in this case there are two betas coefficients that take into account more factors that can affect an asset, instead of just using the beta of the CAPM and the return on assets. It reduces the impact they may have on the outcome of these two values and this, coupled with low beta coefficient for each asset, CAPM says that they have obtained values very close to zero.

<b>Model</b>	<b>Beta Treynor</b>	<b>Beta Jensen</b>	<b>Beta F&amp;F</b>
Mean - Variance	<b>0.5928</b>	0.5912	0.5924
Mean - VaR 1%	<b>0.5928</b>	0.5915	0.5928
Mean - MAD	0.6000	0.5986	0.6002
Mean - Variance - VaR 5%	0.5901	<b>0.5888</b>	<b>0.5902</b>
Mean - Variance - MAD	0.6092	0.6082	0.6097
Mean - VaR - MAD 1%	0.6034	0.6027	0.6041
Mean - Variance - VaR - MAD 5%	0.5999	0.5992	0.6006

**Table 45.** Summary table of the best models Betas

The measures used to assess the performance of the generated portfolios have shown that they are congruent since all agree on what was the best, second best, etc. model, although they have different values and techniques used to calculate them. This indicates that the measures show strength and little disparity show what portfolio has outperformed.

On the other hand it is noteworthy that, despite this, these measures disagree on how well or badly behave the generated portfolios with respect to the benchmark.

Finally, it was surprised that, despite the risk it is willing to take a chance of losses of 40%, the riskier models have not performed better than those who have not taken too much risk, this indicates that there by assuming more risk you will not get better returns.

## Conclusions and Future work

### Conclusions

After having done this research, it must be noted that it have been studied in depth the evolutionary techniques behavior when they are used to solve the problem of the Modern Portfolio Theory.

While it has been unable to obtain a model that beats the benchmark in performance, it must be stressed that, thanks to these

results, it has been shown how the use of different measures of risk affect the final.

The main motivation of this project was to solve one of the major problems that exist with the Modern Portfolio Theory: the poor performance offered by the model proposed by Markowitz, which, despite being theoretically perfect, is not implemented by asset managers and investors due to the limitations and problems presented.

So, therefore, in this work, and given one of the major limitations of the model of Media – Variance, it was proposed as a solution using different ways to measure risk when modeling portfolio optimization problems, to see how they behaved with these measures, and combine them in a real scenario.

This type of solution was raised for the Markowitz due to the limitations of the risk measure used in this model, the variance, and because there are currently more appropriate risk measures when the distributions of returns is not normal and that focus in a more realistic investor preferences.

To solve these problems it was decided to use evolutionary algorithms, specifically NSGA-II (a specific genetic algorithm for solving multi-objective problems). The reasons for using it is to take advantage of the computational power offered by him and that it allows easily manage several objective functions at once. We also noticed that these techniques are generalists and allow it to be adapted to the problem that is being proposed.

They also provide a number of advantages that allow a search starting from a population of points, which significantly reduce the likelihood of falling into local optima with respect to conventional techniques. They do not need auxiliary information to work, simply use the information providing the objective function, which leads to the conclusion on the importance of the definition of this when using such techniques.

This algorithm, from field of evolutionary computing, faces the limitations of classical optimization techniques such problems in the search of global optimum, such as quadratic programming, which have been widely used.

None of the proposed models has managed to beat the market in average term and the model that obtained the best results in this work has been the model proposed by Markowitz model, the Mean - Variance. This model is followed, although by far, by the Mean - VaR. On the other hand the model of Mean – MAD obtained the worst results in all sections.

It has been observed that models employing confidence intervals of 40% have not performed better in profitability models employing less risky ICs and it is because in a real scenario these models may respond very differently to what theory indicates, by the estimation error that occurs in predicting the model parameters.

The explanation behind these results is that, despite its importance, the risk measure used is not the only determining factor in building portfolios.

Factors such as the preferences of investors are not rational (and in these models assume that if). There are also problems to be solved as the prediction of future profitability is made from the average of past returns. The estimation made of the variance-covariance in the risk measures VaR and Variance is not like that then occurs in the real situation and therefore it does not properly measure all correlations and influences that can exert over other assets.

It is noted that they are finding sets of optimal solutions that are very sensitive to small changes in the input parameters. This causes big differences between the calculated parameters in the optimal portfolios generated and how they actually behave when they are subjected to realistic scenarios that are different from those predicted to occur.

This leads to the conclusion that there is a problem of robustness on the best solutions found, i.e., there is an estimation error that is maximized when these models are used under these described techniques, assumptions and restrictions. Then it happens that the difference between estimated and actual parameters can be very wide.

Despite this conclusion, it is noted that it has achieved another objective that this work persecuted, to obtain portfolios that were less risky than the market, as has been demonstrated with the results, it has been achieved.

We have obtained much lower values than those obtained in terms of standard deviation of the index. Moreover, the coefficients betas calculated were less than one, indicating that the portfolios move in the same direction but they do not amplify market movements, neither in a positive neither in a negative direction.

This is because by using the algorithm NSGA-II it has achieved what in theory is considered the Pareto optimal front and are sourced portfolios are better diversified than what becomes the index, i.e. portfolios in which you can eliminate more specific risk than the index can eliminate.

Finally, another objective achieved is that they have managed to create portfolios that, for the period used, they do not simply follow the market trend and amplify it in a negatively or positively way. It was observed that the generated models have a quite independent behavior index. There are points where the index evolved positively while the portfolio had a negative trend. This is important because much of the portfolio managers are dedicated only to follow the index, without doing something different and therefore without really practicing active management.

## **Future work**

Throughout this project it have tried to achieve a model that can get results that make that you can rely on such techniques when you are working in the field of finance or asset management. Despite it does not have achieved the main aim of this study it has found several problems that are proposed as future research.

As described in the concluding section, it is determined that there is a problem of robustness of the solutions found. This is because some parameters, which are very sensitive to variations in the predictions, made are estimated, leading to portfolios generated not behave as expected.

For this problem it is proposed to submit each generated model to different scenarios to address the robustness of the results as an objective more from resampling techniques [24].

Modern Portfolio Theory involves forecasting future parameters such as profitability and risk from what happened in the past, something that has caused the estimated behavior of solutions is very different from the behavior that they have in a real scenario. For this, is proposed as a solution to improve the methods used to estimate these parameters.

The return is being estimated from something as simple as the mean of a time series of returns of asset. This method is very simple since the arithmetic no longer an estimate that does not take into account the extreme behaviors that can occur in this field.

To avoid to use the media, it could use techniques of time series analysis from the field of artificial intelligence, such as neural networks (which make no assumptions about the distribution of data), and to make the model has a better performance closer to the estimate.

One of the major problems in estimating parameters in Modern Portfolio Theory is that is not measured in a correct way the relationship between the behavior of an asset and how it affects the behavior of others,

that is, the estimation that it is made of the covariance matrix is very different from the real.

The estimated matrix is very sensitive to outliers. It aims to improve the estimation of this parameter using more appropriate techniques which provide a better estimation the matrix

Another problem detected in this work is that it was generating investment portfolios following a simple strategy of Buy and Holding of a year and, therefore, they were making profitability and risk estimations that they were made in a long term, when the factors that may affect an asset vary greatly in such long periods.

It is proposed as a solution to use an evaluation period in which the proposal strategy is not following and a more active strategy is followed. You can use the evolutionary techniques, like the algorithm used in this work (NSGA-II) to rebalance the portfolio from time to time, e.g. every week, where the estimated parameters may not be as uncertain and, therefore, achieve better results in terms of profitability and risk-adjusted returns.

Apart from this, it is also proposed to use different assessment intervals, as good times or crisis, to see how the generated portfolios behave, i.e. check if they are portfolios that merely follow the market trend or if they have a more independent behavior.

Finally, it is proposed to continue the work of this project, using different risk measures to the proposals. Mandelbrot [53], one of the pioneers in the study of the behavior of stock prices, observed that the distributions of the stock prices are best fit to the power law distributions than a normal distribution.

This means that measures, such as standard deviation, are not a good measure of risk because, according to the normal distribution, obtain

a yield of 55% once every 740 years happens, but actually happens that equity returns far exceed these values more frequently [53].

Extreme events, which are in the tails of a distribution, occur more frequently than is assumed (fat tails). They may employ different measures of risk that best measure such distributions, combined with previously proposed.

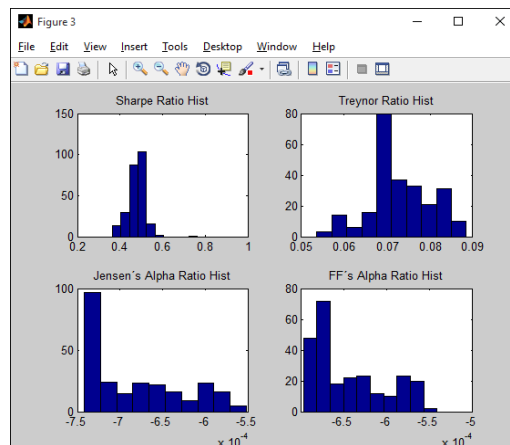
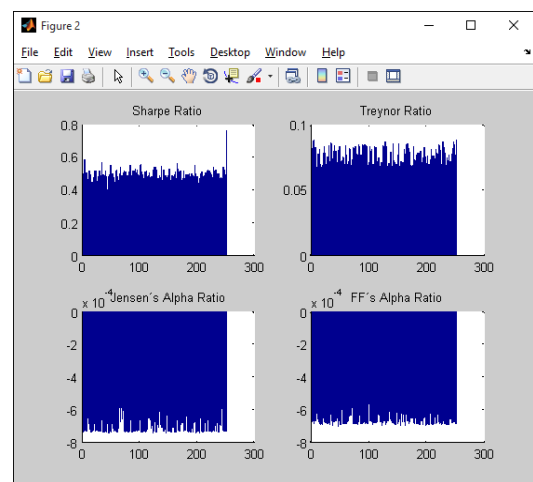
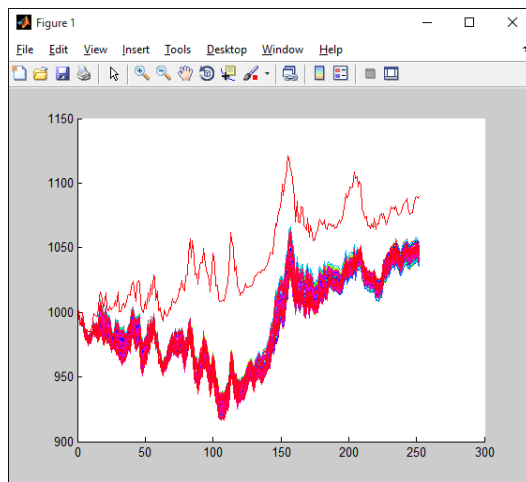


## Anexo 2

### Modelo de Media – Varianza

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5881	0,3647	0,4789	0,4824
'TREYNOR'	0,0881	0,0536	0,0728	0,0714
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0006	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,0006	-0,0007
'RETURN'	0,0542	0,0347	0,0445	0,0451
'STD'	0,0976	0,0863	0,0898	0,0884

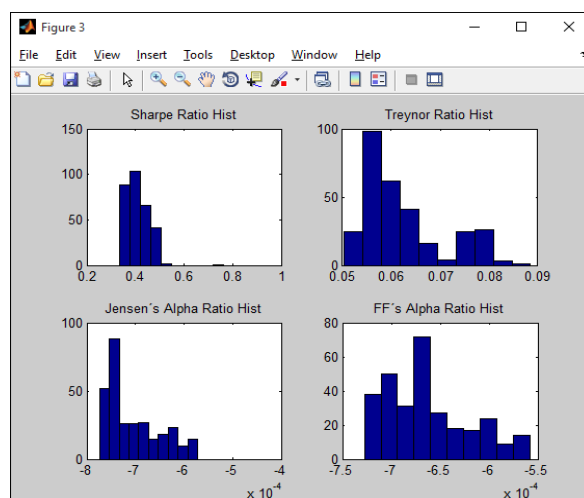
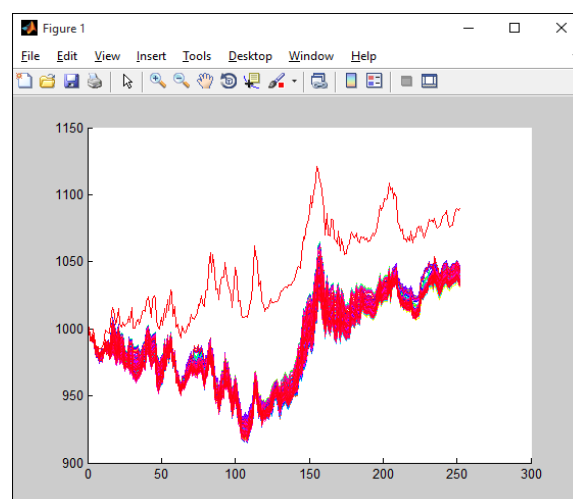
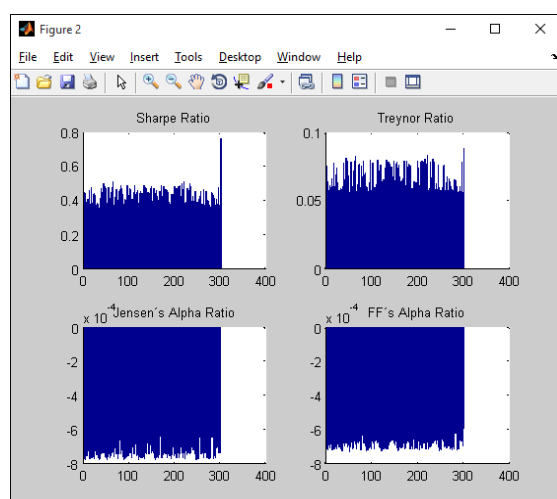
	BEST SHARPE	BEST TREYNOR	BEST JA	BEST FF A	BEST RET	BEST STD
'BEST POS'	5,0000	5,0000	138,0000	138,0000	138,0000	208,0000
'SHARPE'	0,5881	0,5881	0,5437	0,5437	0,5437	0,5114
'TREYNOR'	0,0881	0,0881	0,0792	0,0792	0,0792	0,0811
'JA'	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0007
'FF'	-0,0006	-0,0006	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'RET'	0,0534	0,0534	0,0542	0,0542	0,0542	0,0457
'STD'	0,0882	0,0882	0,0968	0,0968	0,0968	0,0863



## Modelo de Media – Value at Risk 1%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5146	0,3348	0,4084	0,3927
'TREYNOR'	0,0834	0,0504	0,0624	0,0588
'JENSEN'S ALPHA'	-0,000572	-0,000774	-0,000704	-0,000728
'FF'S ALPHA'	-0,000558	-0,000728	-0,000663	-0,000669
'RETURN'	0,0468	0,0307	0,0383	0,0368
'STD'	0,0978	0,0862	0,0900	0,0894

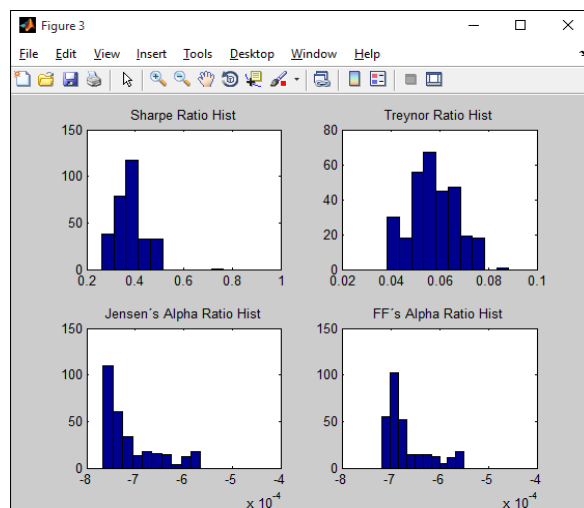
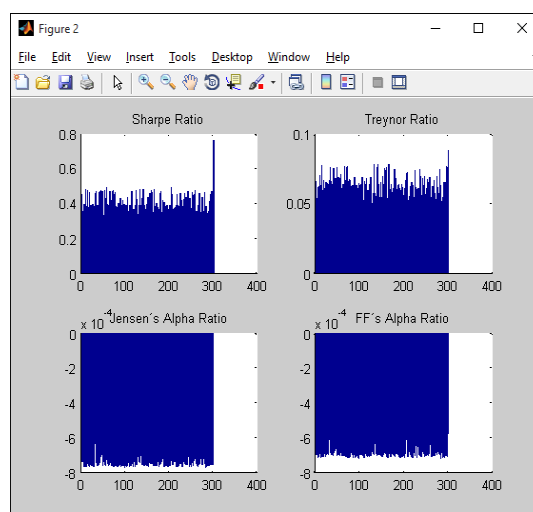
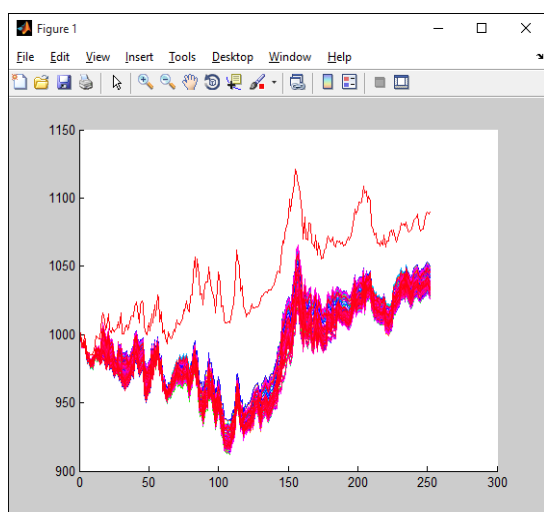
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	221	221	1	1	148	89
'SHARPE'	0,5146	0,5146	0,4528	0,4528	0,4711	0,3809
'TREYNOR'	0,0834	0,0834	0,0655	0,0655	0,0681	0,0600
'JA'	-0,0007	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0008
'FF'	-0,0007	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0007
'RET'	0,0467	0,0467	0,0458	0,0458	0,0468	0,0344
'STD'	0,0878	0,0878	0,0978	0,0978	0,0959	0,0862



## Modelo de Media – VaR 5%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4962	0,2612	0,3770	0,3740
'TREYNOR'	0,0783	0,0387	0,0574	0,0566
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,000565	-0,000766	-0,000710	-0,000735
'FF 'S ALPHA'	-0,000549	-0,000718	-0,000668	-0,000685
'RETURN'	0,0495	0,0251	0,0356	0,0351
'STD'	0,0976	0,0864	0,0904	0,0899

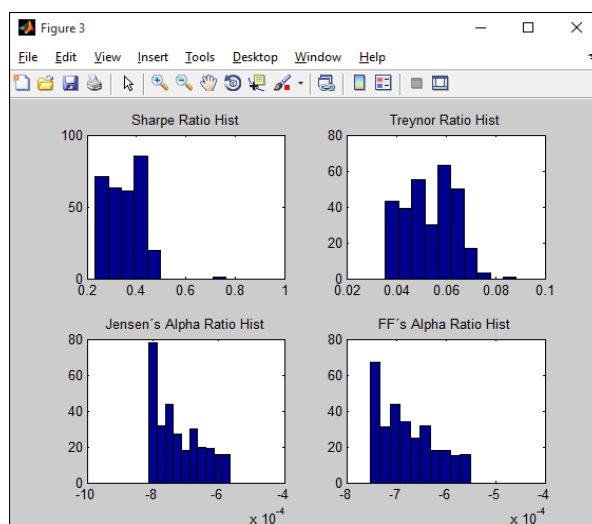
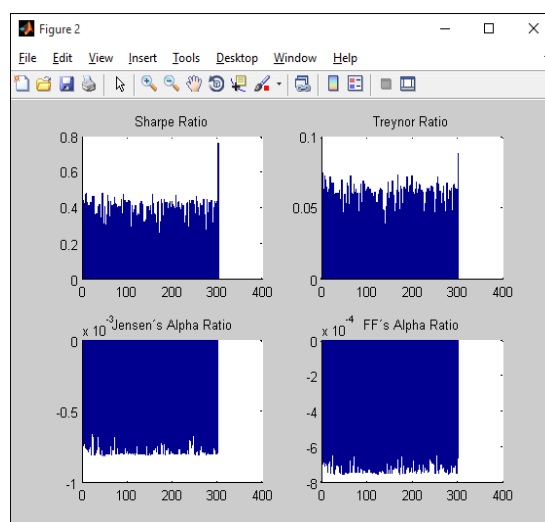
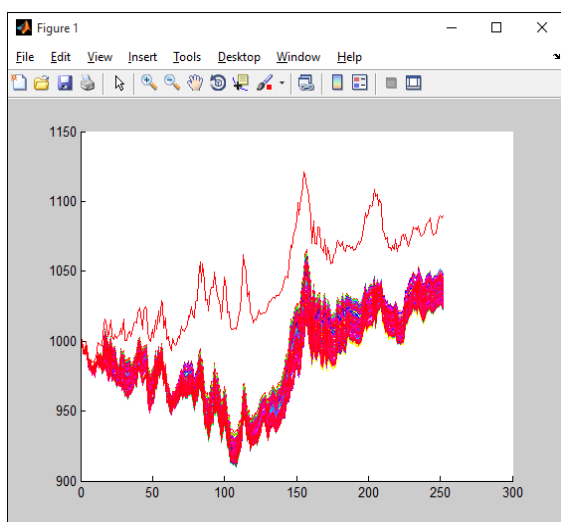
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	206	167	206	206	206	86
'SHARPE'	0,4962	0,4805	0,4962	0,4962	0,4962	0,4034
'TREYNOR'	0,0716	0,0783	0,0716	0,0716	0,0716	0,0634
'JA'	-0,0006	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0008
'FF'	-0,0005	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'RET'	0,0495	0,0442	0,0495	0,0495	0,0495	0,0364
'STD'	0,0965	0,0887	0,0965	0,0965	0,0965	0,0864



## Modelo de Media – VaR 10%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4843	0,2328	0,3536	0,3610
'TREYNOR'	0,0749	0,0357	0,0536	0,0542
'JENSEN'S ALPHA'	-0,000566	-0,000811	-0,000721	-0,000741
'FF'S ALPHA'	-0,000550	-0,000752	-0,000677	-0,000688
'RETURN'	0,0484	0,0218	0,0335	0,0339
'STD'	0,0976	0,0866	0,0900	0,0891

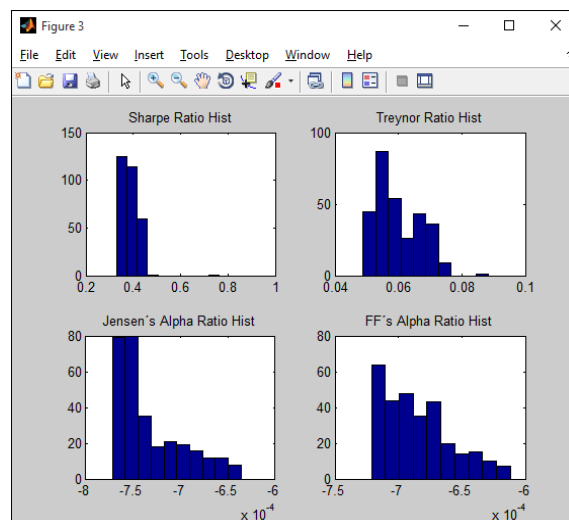
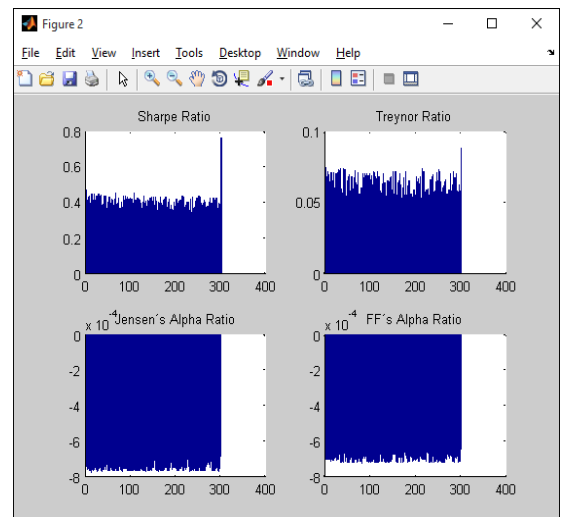
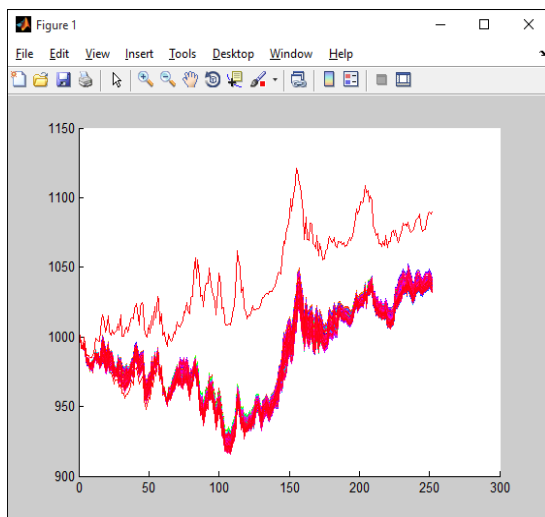
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	45	2	9	9	9	20
'SHARPE'	0,4843	0,4461	0,4821	0,4821	0,4821	0,2590
'TREYNOR'	0,0699	0,0749	0,0696	0,0696	0,0696	0,0404
'JA'	-0,0006	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0008
'FF'	-0,0006	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0007
'RET'	0,0483	0,0428	0,0484	0,0484	0,0484	0,0240
'STD'	0,0964	0,0924	0,0970	0,0970	0,0970	0,0866



## Modelo de Media – VaR 40%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4701	0,3307	0,3884	0,3848
'TREYNOR'	0,0745	0,0489	0,0600	0,0579
'JENSEN'S ALPHA'	-0,000636	-0,000772	-0,000732	-0,000746
'FF'S ALPHA'	-0,000612	-0,000721	-0,000685	-0,000690
'RETURN'	0,0427	0,0310	0,0359	0,0354
'STD'	0,0931	0,0858	0,0888	0,0887

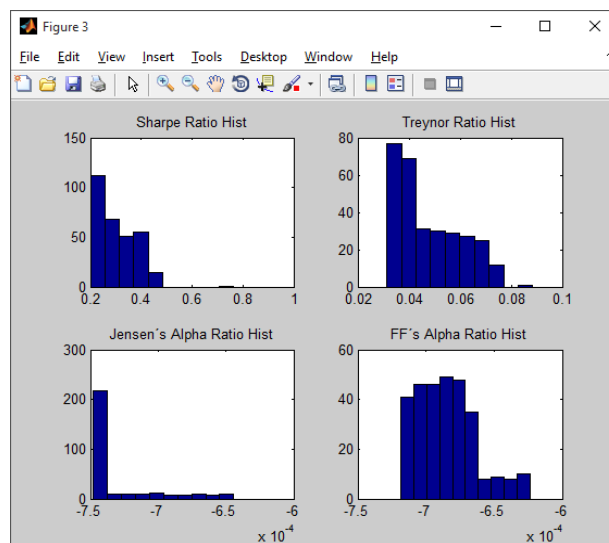
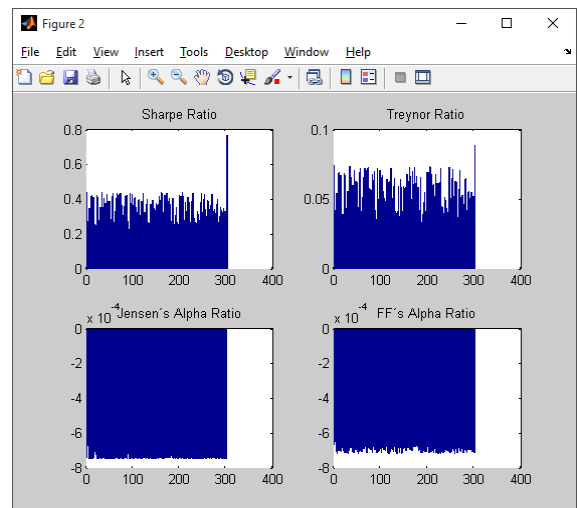
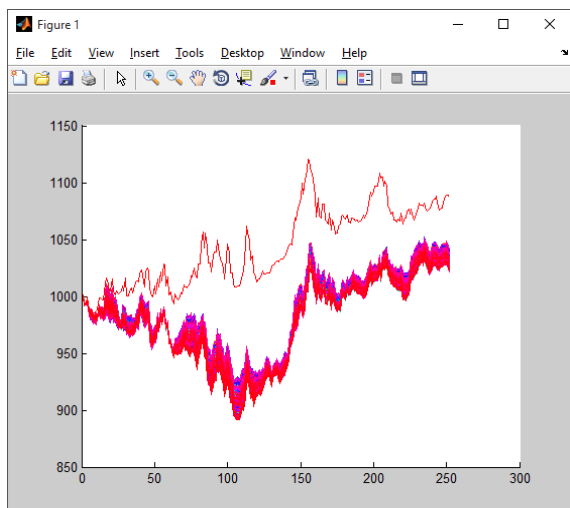
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	3	3	2	2	3	264
'SHARPE'	0,4701	0,4701	0,4207	0,4207	0,4701	0,4131
'TREYNOR'	0,0745	0,0745	0,0613	0,0613	0,0745	0,0649
'JA'	-0,0007	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0007	-0,0008
'FF'	-0,0007	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0007	-0,0007
'RET'	0,0427	0,0427	0,0408	0,0408	0,0427	0,0370
'STD'	0,0875	0,0875	0,0931	0,0931	0,0875	0,0858



## Modelo de Media – MAD

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4385	0,2024	0,3029	0,2804
'TREYNOR'	0,0736	0,0313	0,0476	0,0433
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0006	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0006	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0420	0,0208	0,0297	0,0286
'STD'	0,1037	0,0903	0,0938	0,0920

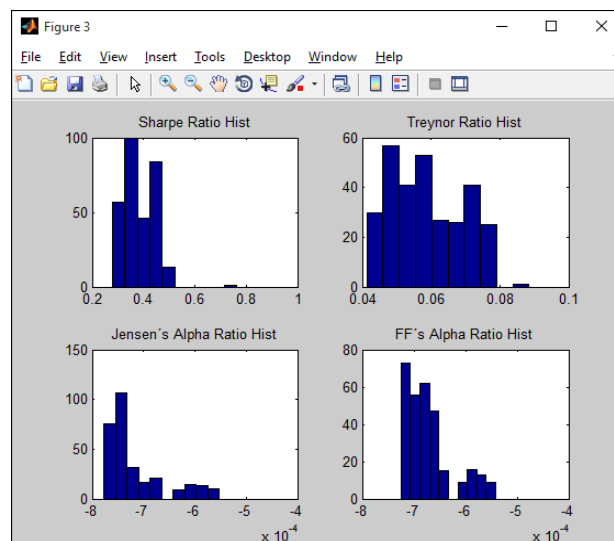
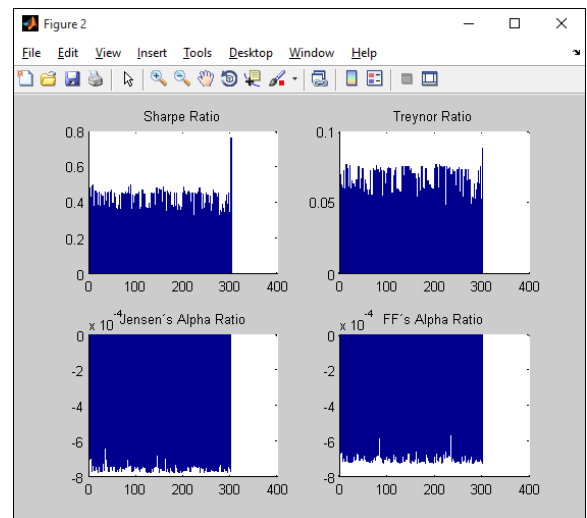
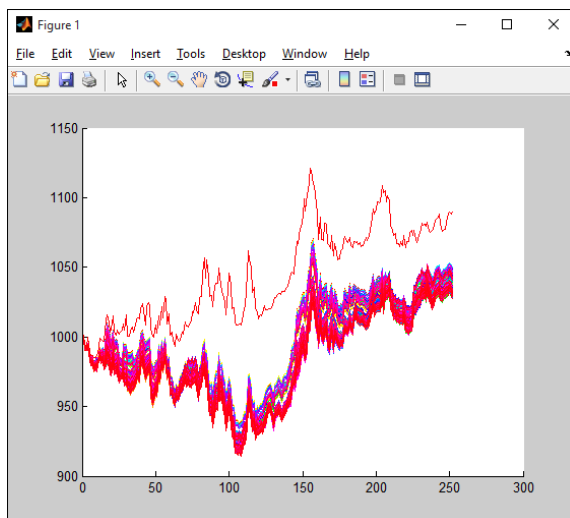
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	1	1	2	2	1	266
'SHARPE'	0,4385	0,4385	0,2716	0,2716	0,4385	0,3620
'TREYNOR'	0,0736	0,0736	0,0421	0,0421	0,0736	0,0570
'JA'	-0,0007	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0007	-0,0007
'FF'	-0,0007	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0007	-0,0007
'RET'	0,0420	0,0420	0,0297	0,0297	0,0420	0,0343
'STD'	0,0922	0,0922	0,1037	0,1037	0,0922	0,0903



## Modelo de Media – Varianza – VaR 1%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4989	0,2786	0,3838	0,3720
'TREYNOR'	0,0773	0,0413	0,0590	0,0577
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,000716821	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,00067203	-0,0007
'RETURN'	0,0494	0,0266	0,0361	0,0339
'STD'	0,0984	0,0863	0,0900	0,0890

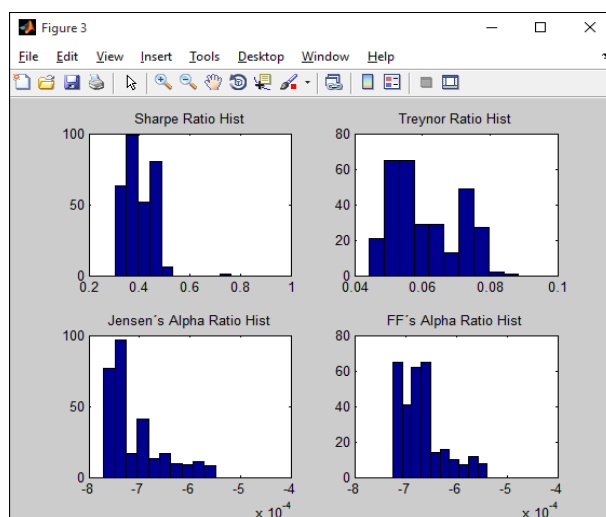
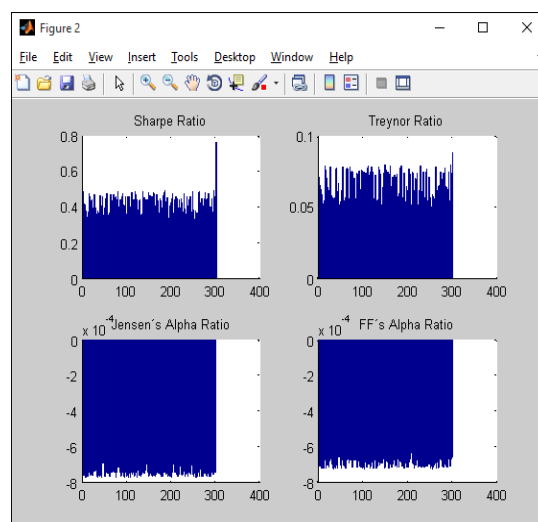
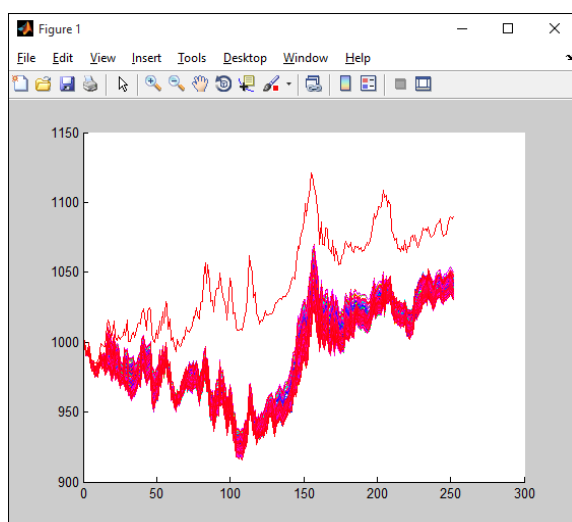
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	89	15	2	3	158	150
'SHARPE'	0,4989	0,4678	0,4779	0,4832	0,4894	0,3645
'TREYNOR'	0,0724	0,0773	0,0690	0,0697	0,0706	0,0571
'JA'	-0,0006	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0008
'FF'	-0,0006	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'RET'	0,0488	0,0438	0,0486	0,0489	0,0494	0,0330
'STD'	0,0946	0,0903	0,0984	0,0980	0,0977	0,0863



## Modelo de Media – Varianza – VaR 5%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4938	0,3027	0,3969	0,3853
'TREYNOR'	0,0798	0,0444	0,0611	0,0575
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,000711361	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,000668013	-0,0007
'RETURN'	0,0497	0,0296	0,0372	0,0359
'STD'	0,0985	0,0860	0,0901	0,0891

	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	296	150	3	3	3	52
'SHARPE'	0,4938	0,4861	0,4891	0,4891	0,4891	0,3974
'TREYNOR'	0,0797	0,0798	0,0707	0,0707	0,0707	0,0620
'JA'	-0,0007	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0008
'FF'	-0,0007	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'RET'	0,0448	0,0450	0,0497	0,0497	0,0497	0,0358
'STD'	0,0876	0,0894	0,0985	0,0985	0,0985	0,0860

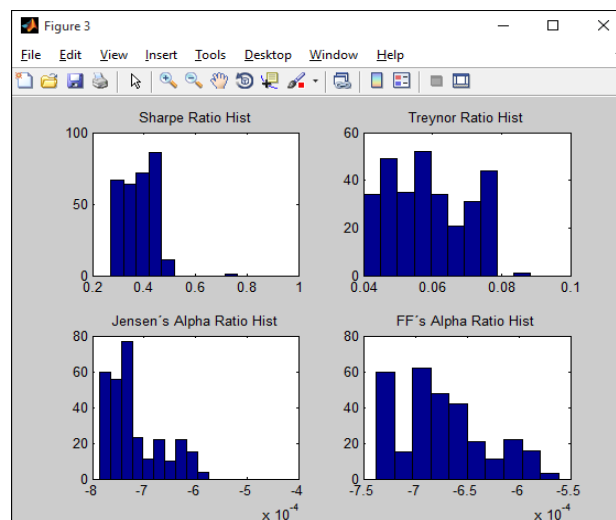
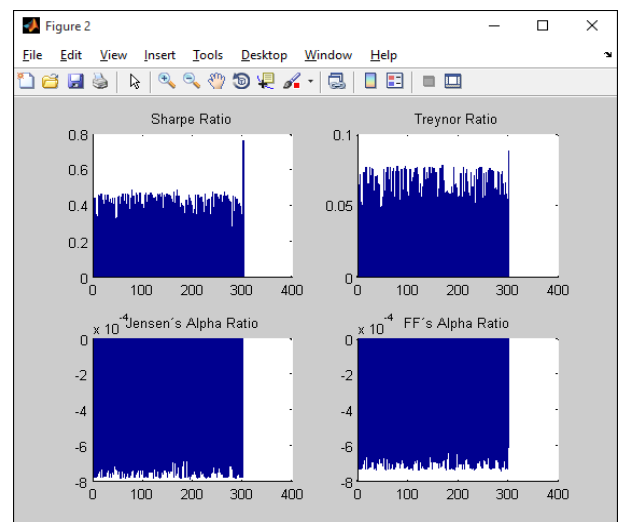
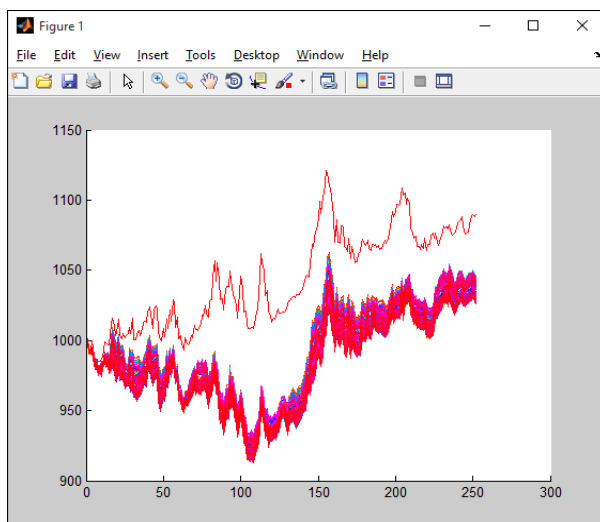




## Modelo de Media – Varianza – VaR 10%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4906	0,2724	0,3833	0,3900
'TREYNOR'	0,0785	0,0402	0,0590	0,0576
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,000719219	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0006	-0,0007	-0,00067455	-0,0007
'RETURN'	0,0457	0,0255	0,0360	0,0372
'STD'	0,0983	0,0861	0,0898	0,0894

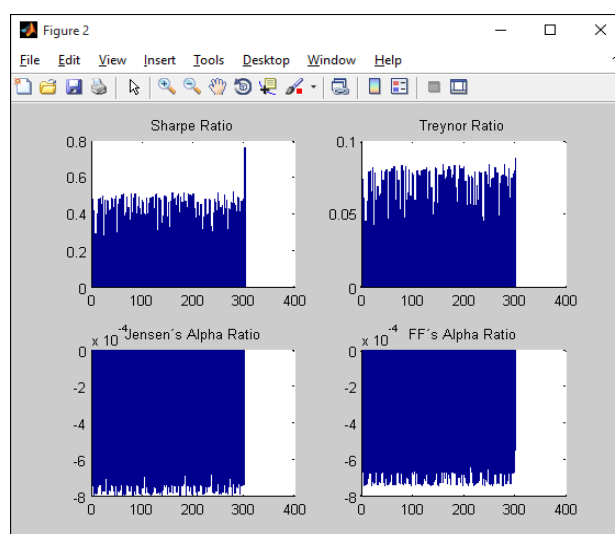
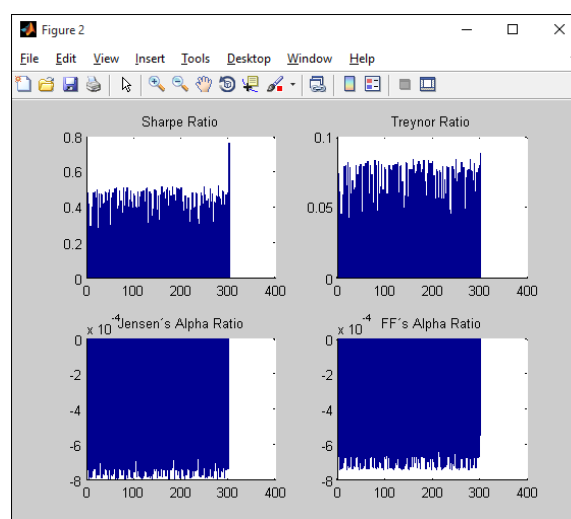
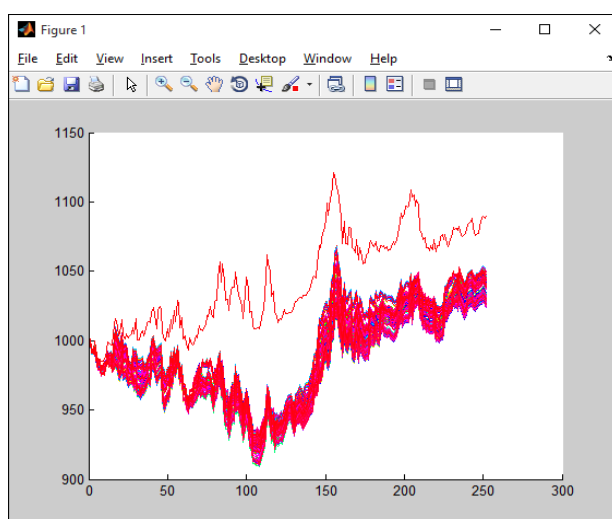
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	169	169	2	2	139	186
'SHARPE'	0,4906	0,4906	0,4458	0,4458	0,4693	0,3699
'TREYNOR'	0,0785	0,0785	0,0650	0,0650	0,0689	0,0582
'JA'	-0,0007	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0008
'FF'	-0,0007	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0007
'RET'	0,0442	0,0442	0,0454	0,0454	0,0457	0,0334
'STD'	0,0869	0,0869	0,0983	0,0983	0,0939	0,0861



## Modelo de Media – Varianza – VaR 40%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5225	0,2464	0,3819	0,3920
'TREYNOR'	0,0841	0,0372	0,0592	0,0576
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,000720678	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,00067406	-0,0007
'RETURN'	0,0498	0,0232	0,0360	0,0373
'STD'	0,0991	0,0867	0,0902	0,0896

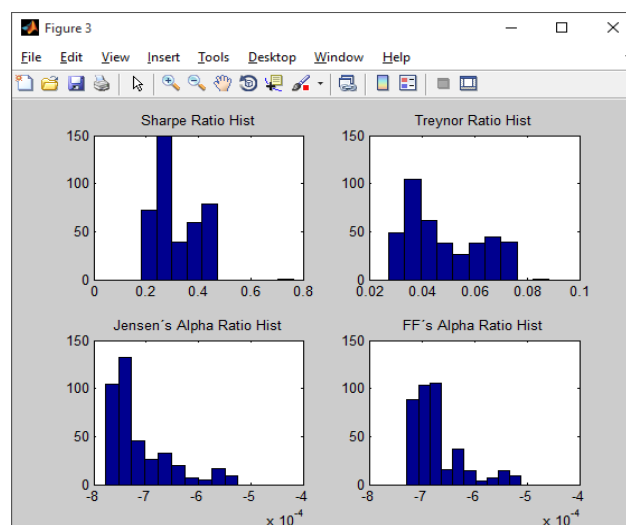
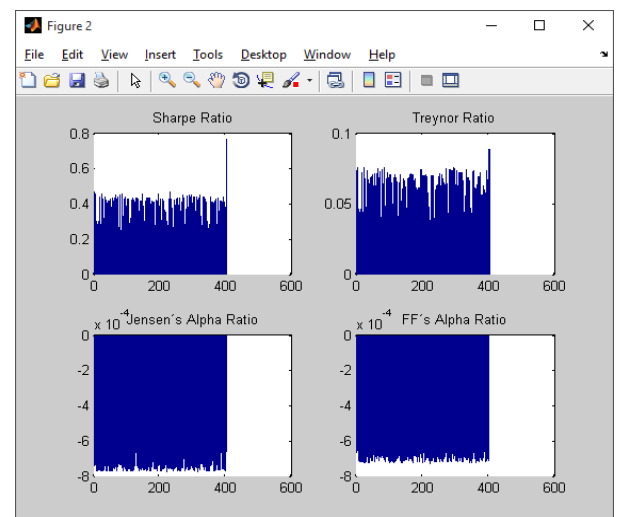
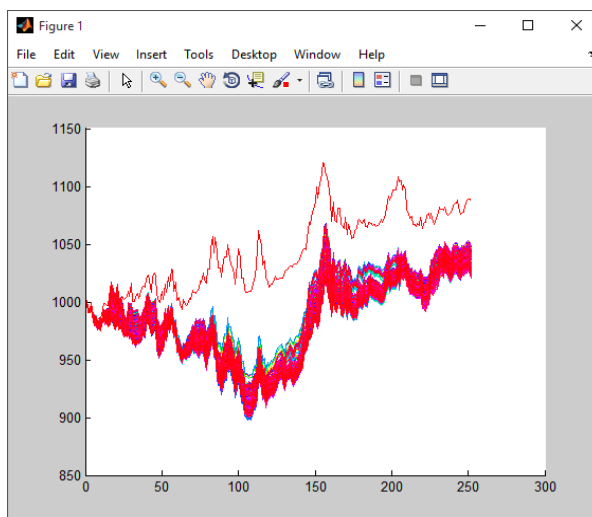
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	279	279	164	164	164	186
'SHARPE'	0,5225	0,5225	0,4869	0,4869	0,4869	0,2943
'TREYNOR'	0,0841	0,0841	0,0706	0,0706	0,0706	0,0459
'JA'	-0,0007	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0008
'FF'	-0,0007	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'RET'	0,0471	0,0471	0,0498	0,0498	0,0498	0,0271
'STD'	0,0872	0,0872	0,0990	0,0990	0,0990	0,0867



## Modelo de Media – Varianza – MAD

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4665	0,1815	0,3133	0,2835
'TREYNOR'	0,0753	0,0274	0,0487	0,0433
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,0007	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,0007	-0,0007
'RETURN'	0,0480	0,0200	0,0307	0,0280
'STD'	0,1063	0,0880	0,0938	0,0918

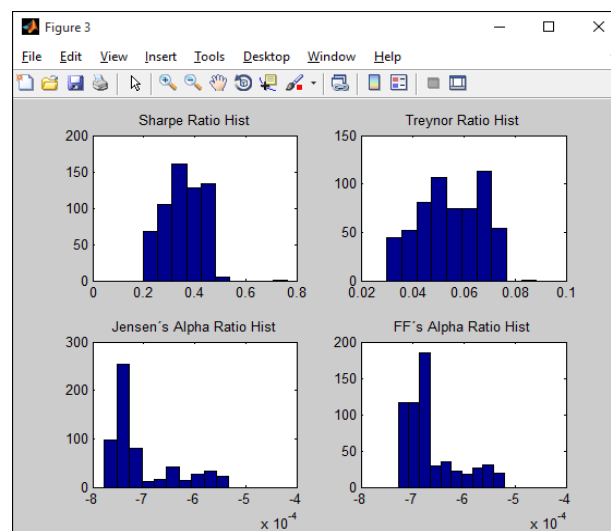
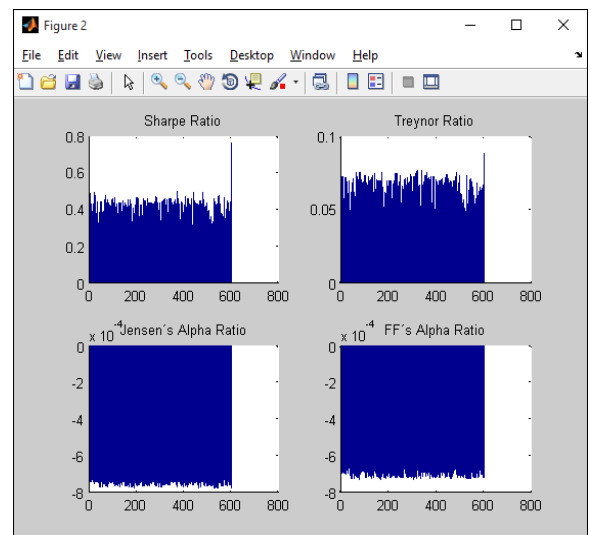
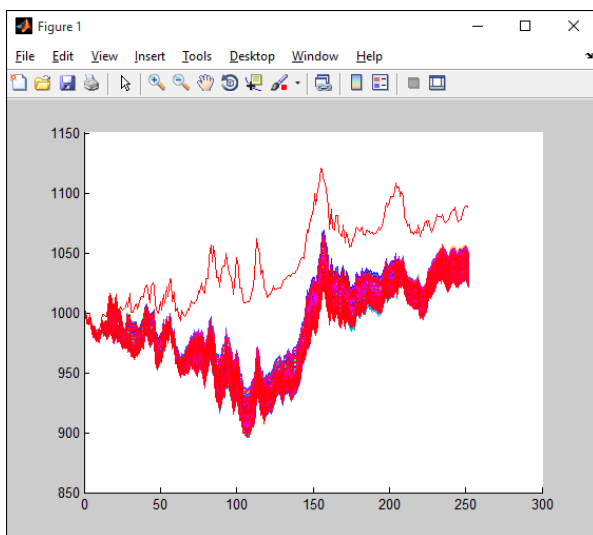
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	231	85	4	4	322	94
'SHARPE'	0,4665	0,4533	0,4342	0,4342	0,4475	0,4103
'TREYNOR'	0,0674	0,0753	0,0649	0,0649	0,0664	0,0650
'JA'	-0,0006	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0008
'FF'	-0,0006	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'RET'	0,0473	0,0429	0,0475	0,0475	0,0480	0,0377
'STD'	0,0979	0,0911	0,1059	0,1059	0,1037	0,0880



## Modelo de Media – VaR – MAD 1%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4990	0,1989	0,3551	0,3537
'TREYNOR'	0,0767	0,0301	0,0551	0,0542
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,000704786	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,000663060	-0,0007
'RETURN'	0,0503	0,0204	0,0346	0,0343
'STD'	0,1049	0,0868	0,0931	0,0913

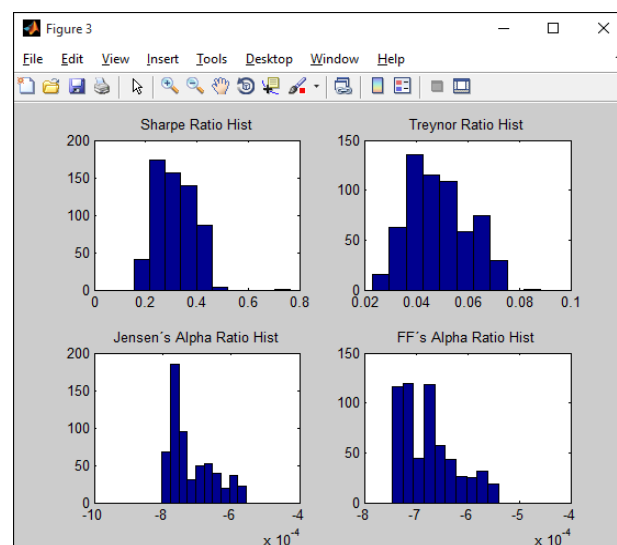
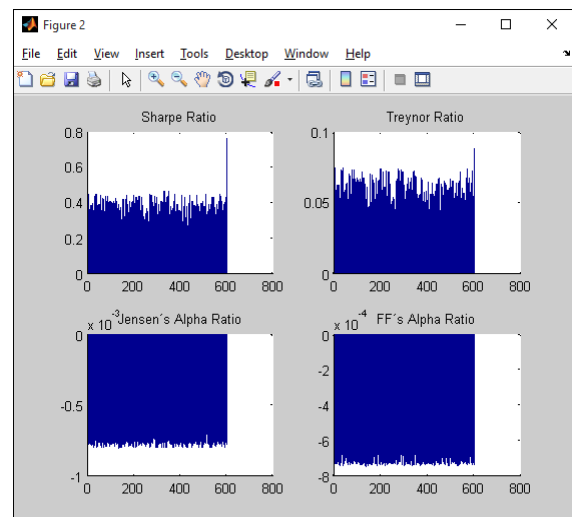
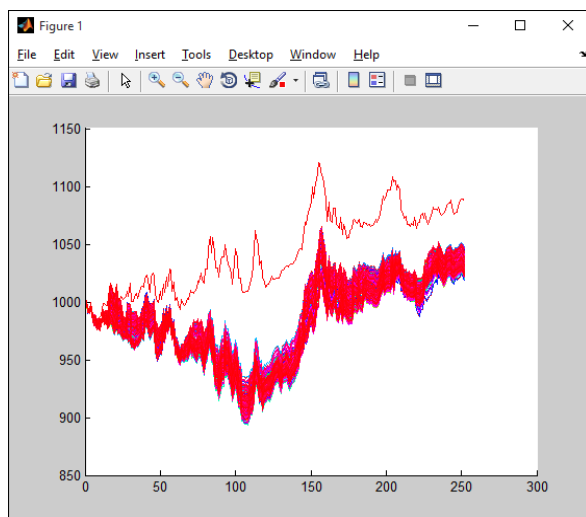
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	371	321	164	164	371	286
'SHARPE'	0,4990	0,4630	0,4581	0,4581	0,4990	0,3895
'TREYNOR'	0,0722	0,0767	0,0689	0,0689	0,0722	0,0610
'JA'	-0,0006	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0006	-0,0008
'FF'	-0,0005	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'RET'	0,0503	0,0437	0,0495	0,0495	0,0503	0,0354
'STD'	0,0977	0,0909	0,1045	0,1045	0,0977	0,0868



## Modelo de Media – VaR – MAD 5%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4664	0,1544	0,3164	0,3135
'TREYNOR'	0,0752	0,0233	0,0488	0,0478
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,0007162328	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,0006743669	-0,0007
'RETURN'	0,0471	0,0179	0,0310	0,0302
'STD'	0,1078	0,0869	0,0930	0,0910

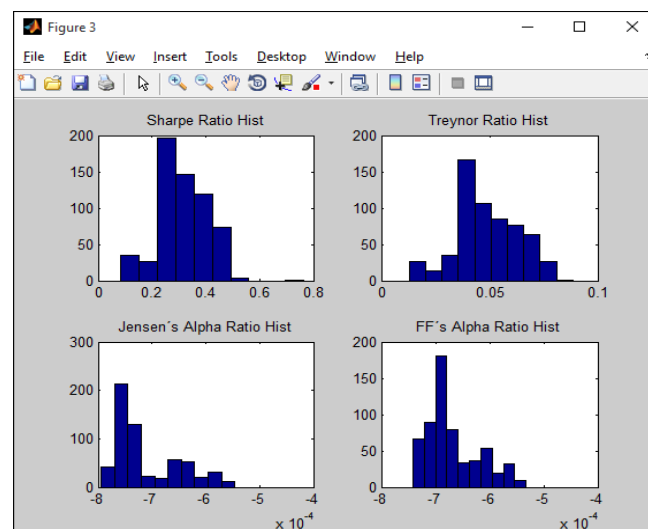
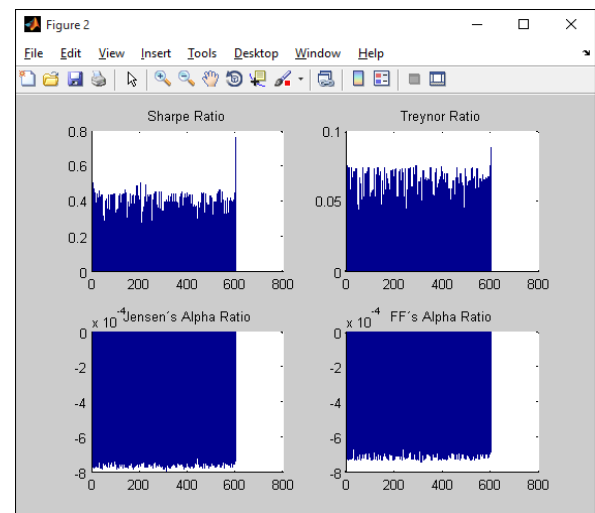
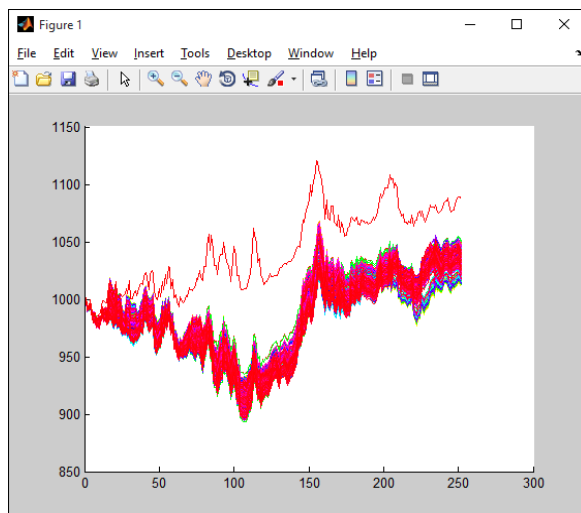
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	352	39	591	591	352	154
'SHARPE'	0,4664	0,4518	0,4039	0,4039	0,4664	0,3078
'TREYNOR'	0,0682	0,0752	0,0607	0,0607	0,0682	0,0475
'JA'	-0,0006	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0008
'FF'	-0,0006	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0006	-0,0007
'RET'	0,0471	0,0431	0,0438	0,0438	0,0471	0,0283
'STD'	0,0977	0,0920	0,1046	0,1046	0,0977	0,0869



## Modelo de Media – VaR – MAD 10%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5085	0,0849	0,3136	0,3031
'TREYNOR'	0,0755	0,0128	0,0487	0,0462
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,000710120	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,000667755	-0,0007
'RETURN'	0,0511	0,0111	0,0308	0,0299
'STD'	0,1124	0,0867	0,0942	0,0917

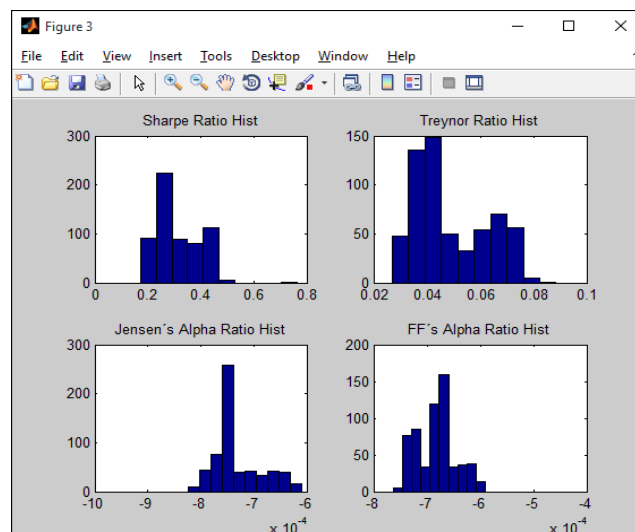
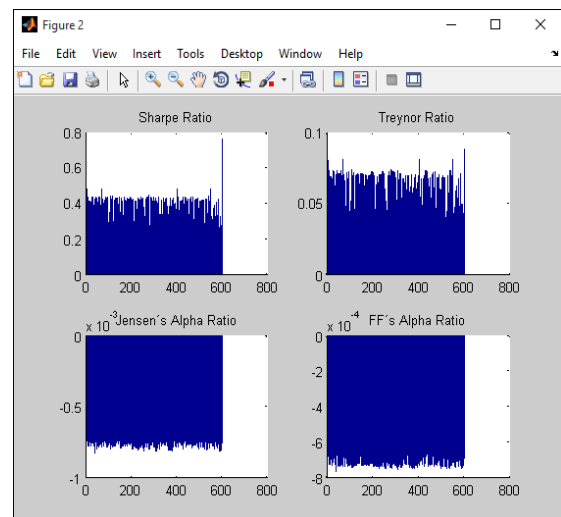
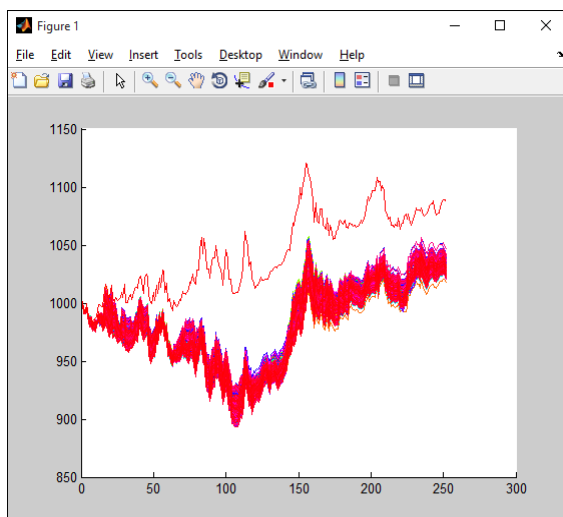
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	206	291	61	61	4	312
'SHARPE'	0,5085	0,4535	0,4161	0,4161	0,5083	0,2673
'TREYNOR'	0,0735	0,0755	0,0624	0,0624	0,0735	0,0413
'JA'	-0,0006	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0006	-0,0008
'FF'	-0,0005	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'RET'	0,0509	0,0434	0,0452	0,0452	0,0511	0,0247
'STD'	0,0969	0,0922	0,1048	0,1048	0,0974	0,0867



## Modelo de Media – VaR – MAD 40%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,4848	0,1736	0,3135	0,2881
'TREYNOR'	0,0813	0,0270	0,0490	0,0439
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,000729	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0006	-0,0008	-0,000682	-0,0007
'RETURN'	0,0463	0,0168	0,0304	0,0289
'STD'	0,1052	0,0874	0,0925	0,0909

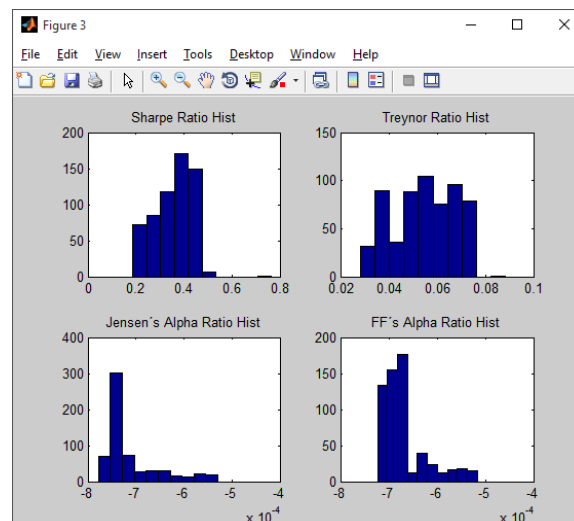
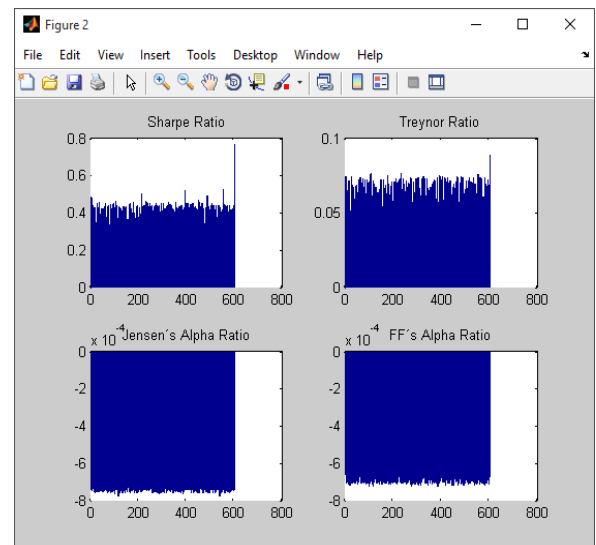
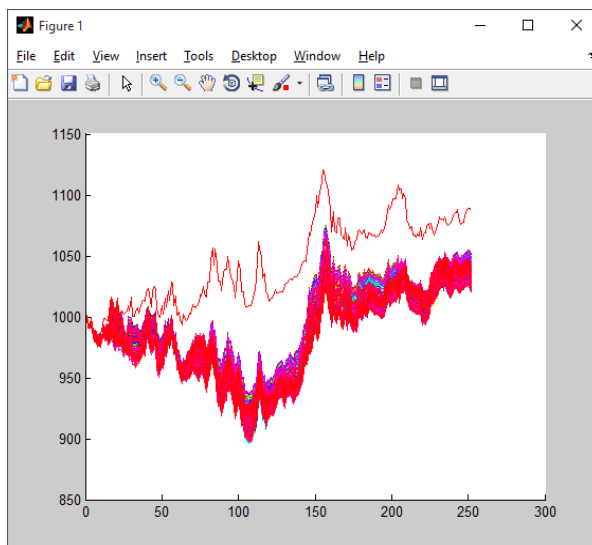
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	403	403	113	113	403	42
'SHARPE'	0,4848	0,4848	0,3118	0,3118	0,4848	0,1736
'TREYNOR'	0,0813	0,0813	0,0475	0,0475	0,0813	0,0270
'JA'	-0,0007	-0,0007	-0,0006	-0,0006	-0,0007	-0,0008
'FF'	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0008
'RET'	0,0463	0,0463	0,0340	0,0340	0,0463	0,0168
'STD'	0,0923	0,0923	0,1041	0,1041	0,0923	0,0874



## Modelo de Media – Varianza - VaR – MAD 1%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5216	0,1879	0,3541	0,3677
'TREYNOR'	0,0760	0,0282	0,0549	0,0563
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,000711	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,000668	-0,0007
'RETURN'	0,0514	0,0194	0,0341	0,0345
'STD'	0,1057	0,0863	0,0924	0,0907

	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	552	232	90	90	552	538
'SHARPE'	0,5216	0,4596	0,4223	0,4223	0,5216	0,3722
'TREYNOR'	0,0753	0,0760	0,0630	0,0630	0,0753	0,0586
'JA'	-0,0006	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0006	-0,0008
'FF'	-0,0006	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0006	-0,0007
'RET'	0,0514	0,0432	0,0462	0,0462	0,0514	0,0337
'STD'	0,0955	0,0905	0,1057	0,1057	0,0955	0,0863

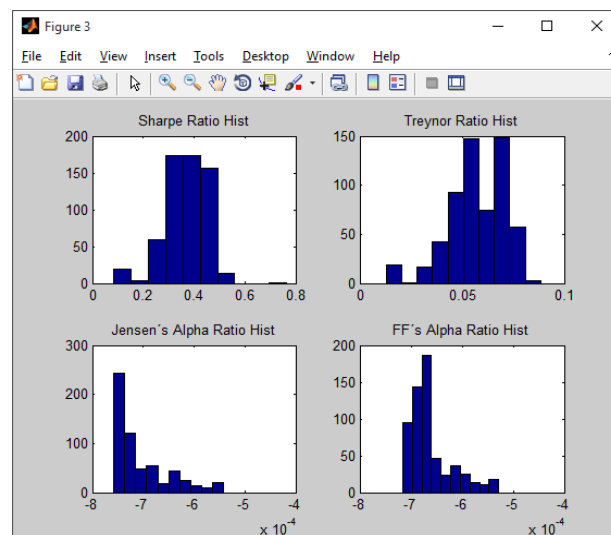
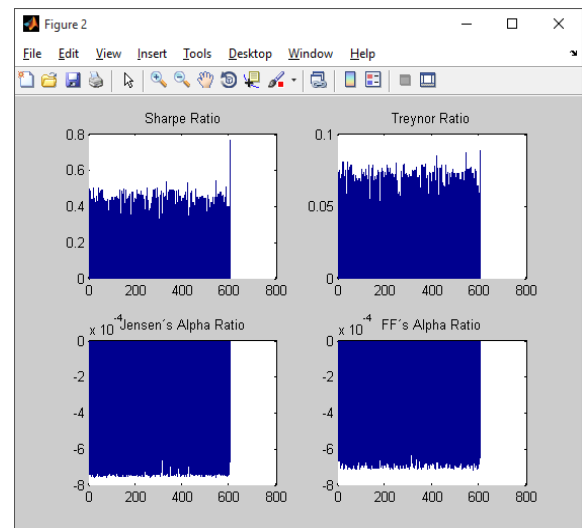
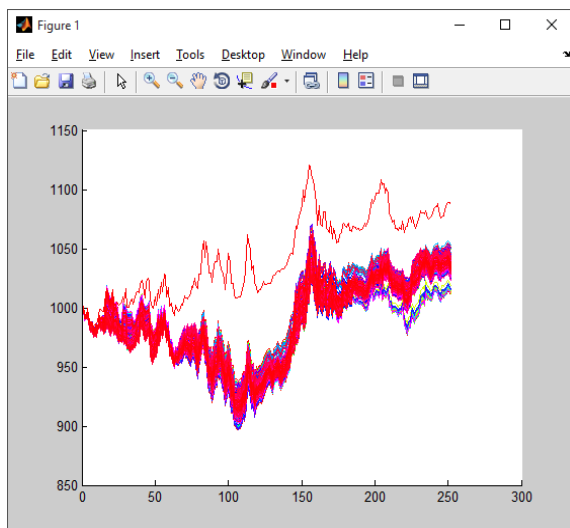




## Modelo de Media – Varianza - VaR – MAD 5%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5429	0,0851	0,3681	0,3743
'TREYNOR'	0,0867	0,0128	0,0573	0,0569
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,00070421	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,00066236	-0,0007
'RETURN'	0,0526	0,0111	0,0354	0,0353
'STD'	0,1124	0,0870	0,0929	0,0908

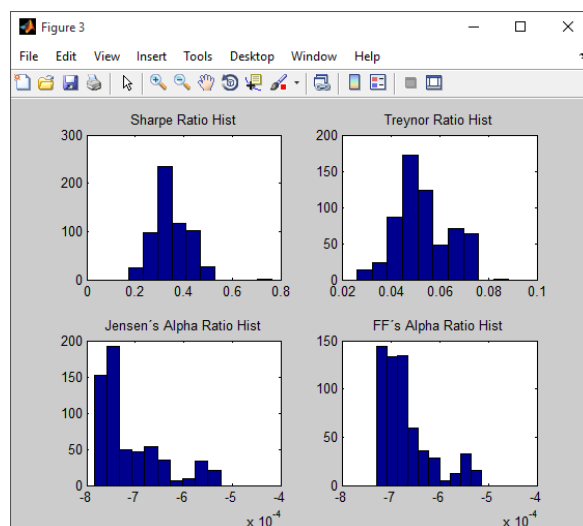
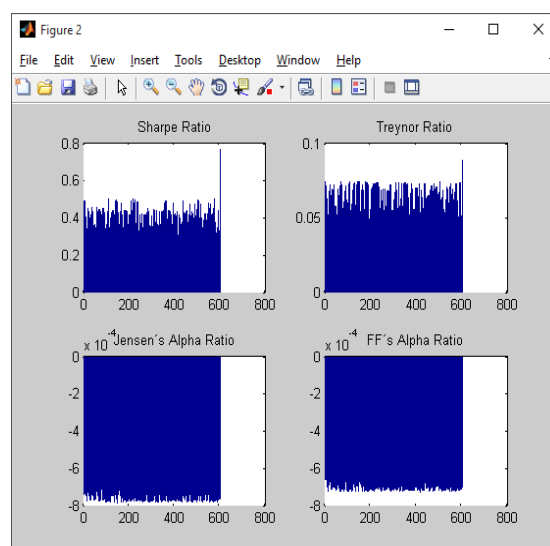
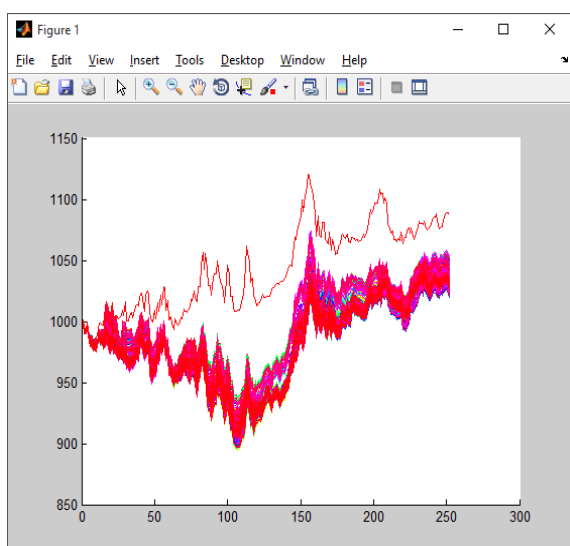
	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	541	541	141	141	330	167
'SHARPE'	0,5429	0,5429	0,4827	0,4827	0,5345	0,3810
'TREYNOR'	0,0867	0,0867	0,0704	0,0704	0,0772	0,0590
'JA'	-0,0007	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0006	-0,0008
'FF'	-0,0007	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'RET'	0,0488	0,0488	0,0499	0,0499	0,0526	0,0347
'STD'	0,0870	0,0870	0,1002	0,1002	0,0955	0,0870



## Modelo de Media – Varianza - VaR – MAD 10%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5021	0,1747	0,3446	0,3343
'TREYNOR'	0,0743	0,0262	0,0535	0,0514
'JENSEN 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,00071147	-0,0007
'FF 'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,00066797	-0,0007
'RETURN'	0,0527	0,0192	0,0335	0,0322
'STD'	0,1055	0,0875	0,0929	0,0911

	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	573	69	504	504	503	70
'SHARPE'	0,5021	0,4461	0,4852	0,4852	0,4937	0,3042
'TREYNOR'	0,0729	0,0743	0,0713	0,0713	0,0740	0,0469
'JA'	-0,0006	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0008
'FF'	-0,0005	-0,0007	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'RET'	0,0508	0,0425	0,0513	0,0513	0,0527	0,0282
'STD'	0,0980	0,0918	0,1024	0,1024	0,1036	0,0875



## Modelo de Media – Varianza - VaR – MAD 40%

	'MAX'	'MIN'	'MEAN'	'MEDIAN'
'SHARPE'	0,5307	0,1495	0,3419	0,3530
'TREYNOR'	0,0767	0,0227	0,0532	0,0546
'JENSEN'S ALPHA'	-0,0005	-0,0008	-0,000712338	-0,0007
'FF'S ALPHA'	-0,0005	-0,0007	-0,000666638	-0,0007
'RETURN'	0,0535	0,0156	0,0332	0,0337
'STD'	0,1060	0,0866	0,0930	0,0910

	'BEST SHARPE'	'BEST TREYNOR'	'BEST JA'	'BEST FF'	'BEST RET'	'BEST STD'
'BEST POS'	358	358	3	3	358	84
'SHARPE'	0,5307	0,5307	0,3946	0,3946	0,5307	0,4175
'TREYNOR'	0,0767	0,0767	0,0587	0,0587	0,0767	0,0649
'JA'	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'FF'	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0007
'RET'	0,0535	0,0535	0,0434	0,0434	0,0535	0,0377
'STD'	0,0978	0,0978	0,1060	0,1060	0,0978	0,0866

